Vektorräume und lineare Abbildungen

11

Wie kann man mit Vektoren umgehen?

Welche Abbildungen passen zu Vektoren?

Wie hängen Abstände und Entfernungen mit Vektoren zusammen?

Mit welchen Teilmengen von Vektorräumen kann man besonders gut arbeiten?

Teil III

L. Göllmann et al., *Mathematik für Ingenieure: Verstehen – Rechnen – Anwenden*, DOI 10.1007/978-3-662-53867-8_11

Die wesentlichen Regeln zum Rechnen mit Vektoren wurden in Kap. 9 und Kap. 10 aus der Geometrie und der Darstellung mit Pfeilen abgeleitet. Viele dieser Eigenschaften gelten jedoch sehr viel allgemeiner und können unabhängig von den geometrischen Objekten, die den ebenen oder räumlichen Vektoren zugrunde liegen, betrachtet werden. Daher werden wir ganz allgemein Mengen, in denen gewisse Rechenregeln gelten, betrachten und versuchen, diese zu strukturieren und zu klassifizieren. Die so gewonnenen Vektorräume sind die zentralen Größen der linearen Algebra. Ihre Bedeutung gewinnen die Vektoren durch die Operationen (wie Addition oder Skalarmultiplikation), die wir mit ihnen durchführen können. Sie helfen auch, physikalische und technische Gesetze und Prinzipien zu beschreiben und darzustellen.

11.1 Der n-dimensionale reelle Raum

Teil III

In den vorhergehenden Kapiteln haben wir Vektoren in der Ebene und im Raum untersucht. Dabei hat sich herausgestellt, dass sich diese Vektoren durch Paare bzw. Tripel reeller Zahlen darstellen lassen und dass umgekehrt jedes Paar bzw. Tripel reeller Zahlen einen Vektor in der Ebene bzw. im Raum definiert. Alle Eigenschaften und Operationen von Vektoren haben sich durch diese Zahlenpaare und Zahlentripel beschreiben lassen, und bei vielen dieser Beschreibungen hat es keine Rolle gespielt, dass wir mit Paaren oder Tripeln operiert haben; sie lassen sich genauso für Tupel größerer Länge formulieren. Diese Idee soll nun weiterentwickelt werden.

Tupel von Zahlen sind Vektoren

Definition

Ein n**-Vektor** oder ein n-dimensionaler Vektor $\boldsymbol{v}$ ist ein n-Tupel

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

reeller Zahlen $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

$|\boldsymbol{v}| := \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}$ heißt die **Länge** von $\boldsymbol{v}$.

Wir wählen immer die Schreibweise von n-Tupeln als Spalten, wenn wir von Vektoren sprechen. Für Elemente des $\mathbb{R}^n$ (etwa Punkte in der Ebene oder im Raum) benutzen wir dagegen in diesem Kapitel in der Regel die Zeilenschreibweise.

Die Beschreibung der Vektoroperationen überträgt sich sofort auf diesen Kontext:

Für zwei n-Vektoren $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$ definieren wir die Vektoraddition durch

$$\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \\ \vdots \\ v_n + w_n \end{pmatrix},$$

zwei Vektoren werden also durch Addition der Komponenten addiert. Analog definieren wir die Differenz von $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{w}$ komponentenweise durch

$$\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} v_1 - w_1 \\ v_2 - w_2 \\ \vdots \\ v_n - w_n \end{pmatrix}.$$

Beispiel

Für $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$ ist

$$\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 1+2 \\ 2+(-3) \\ 3+4 \\ 4+(-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und

$$\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 1-2 \\ 2-(-3) \\ 3-4 \\ 4-(-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

◀

Der n-Vektor

$$\boldsymbol{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

heißt n-dimensionaler Nullvektor.

Der inverse oder der negative Vektor $-\boldsymbol{v}$ von einem n-Vektor $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ wird komponentenweise gebildet:

$$-\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} -v_1 \\ -v_2 \\ \vdots \\ -v_n \end{pmatrix}.$$

Beispiel

Der negative Vektor von $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ist $-\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. ◀

Für einen n-Vektor $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ und einen Skalar $r \in \mathbb{R}$ wird die Skalarmultiplikation $r \cdot \boldsymbol{v}$ komponentenweise erklärt:

$$r \cdot \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} r \cdot v_1 \\ r \cdot v_2 \\ \vdots \\ r \cdot v_n \end{pmatrix}.$$

Beispiel

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot 3 \\ 3 \cdot (-1) \\ 3 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$$ ◀

Die Menge $\mathbb{R}^n$ ist ein Vektorraum

Wir haben Vektoraddition und Skalarmultiplikation auf den n-Vektoren definiert. Da die Menge der n-Vektoren mit dem $\mathbb{R}^n$ identifiziert werden kann, haben wir mathematisch gesprochen also zwei Paarungen, die Addition

$$'+' : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

und die Skalarmultiplikation

$$'\cdot' : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

erhalten. Wie im Zwei- oder Dreidimensionalen gelten auch in $V = \mathbb{R}^n$ viele Aussagen, die das Arbeiten mit der Vektoraddition und der Skalarmultiplikation einfacher machen.

Die Vektorraumaxiome

1. Es gilt das erste Assoziativgesetz:
$$(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) \quad \text{für alle } \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$$
2. Es gilt das Kommutativgesetz:
$$\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{w} + \boldsymbol{v} \quad \text{für alle } \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$$
3. Es gibt ein neutrales Element $\boldsymbol{0} \in V$ mit
$$\boldsymbol{v} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{v} \quad \text{für alle } \boldsymbol{v} \in V.$$
4. Zu jedem $\boldsymbol{v} \in V$ existiert ein Vektor $-\boldsymbol{v} \in V$ mit
$$\boldsymbol{v} + (-\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}.$$
5. Es gilt das zweite Assoziativgesetz:
$$(r \cdot s) \cdot \boldsymbol{v} = r \cdot (s \cdot \boldsymbol{v}) \quad \text{für alle } \boldsymbol{v} \in V,\ r, s \in \mathbb{R}$$
6. Es gilt das erste Distributivgesetz:
$$r \cdot (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = r \cdot \boldsymbol{v} + r \cdot \boldsymbol{w} \quad \text{für alle } \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V,\ r \in \mathbb{R}$$
7. Es gilt das zweite Distributivgesetz:
$$(r + s) \cdot \boldsymbol{v} = r \cdot \boldsymbol{v} + s \cdot \boldsymbol{v} \quad \text{für alle } \boldsymbol{v} \in V,\ r, s \in \mathbb{R}$$
8. Die $1 \in \mathbb{R}$ ist das neutrale Element der Skalarmultiplikation:
$$1 \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \quad \text{für alle } \boldsymbol{v} \in V$$

Für alle $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ und alle $r \in R$ gilt folglich:

1. $0 \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$
2. $r \cdot \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$

Definition

Die Menge $\mathbb{R}^n$, zusammen mit dieser Vektoraddition und Skalarmultiplikation, heißt (reeller) **Vektorraum der Dimension $\boldsymbol{n}$**.

Beispiel

1. Der Vektorraum $\mathbb{R}^2$ identifiziert sich mit der Menge der ebenen Vektoren.
2. Der Vektorraum $\mathbb{R}^3$ identifiziert sich mit der Menge der räumlichen Vektoren. ◀

Teil III

Auf einer Menge M können wir immer auch Abbildungen und Funktionen betrachten, also Zuordnungen, die jedem Element $m \in M$ nach bestimmten Regeln oder Vorschriften Elemente einer anderen Menge zuweisen. Das ist natürlich auch auf dem $\mathbb{R}^n$ möglich, und wir können Abbildungen

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \qquad \text{oder} \quad \varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

betrachten. Wenn wir dabei $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{R}^m$ als Vektorraum auffassen, dann interessieren wir uns besonders für solche Abbildungen, die Beziehungen zu den Vektorraumstrukturen haben.

Definition

Eine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ heißt **linear**, wenn

1. $f(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) = f(\boldsymbol{v}) + f(\boldsymbol{w})$ für alle $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n$,
2. $f(r \cdot \boldsymbol{v}) = r \cdot f(\boldsymbol{v})$ für alle $r \in \mathbb{R}$ und $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$.

Die Menge der linearen Abbildungen $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ bezeichnen wir mit $\operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

Teil III

Das Besondere an linearen Abbildungen ist also, dass sie in natürlicher Weise mit den Vektorraumgesetzen verträglich sind und Addition in Addition bzw. Skalarmultiplikation in Skalarmultiplikation überführen.

Eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ wird auch Linearform genannt.

Beispiel

1. Die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$f\left(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} v_1 + v_2 \\ v_1 - v_2 \end{pmatrix}$$

ist linear. Das rechnen wir leicht nach. So gilt etwa

$$\begin{aligned} f\left(r \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right) &= f\left(\begin{pmatrix} r \cdot v_1 \\ r \cdot v_2 \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} r \cdot v_1 + r \cdot v_2 \\ r \cdot v_1 - r \cdot v_2 \end{pmatrix} \\ &= r \cdot \begin{pmatrix} v_1 + v_2 \\ v_1 - v_2 \end{pmatrix} \\ &= r \cdot f\left(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} f\left(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}\right) &= f\left(\begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} v_1 + w_1 + v_2 + w_2 \\ v_1 + w_1 - v_2 - w_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} v_1 + v_2 \\ v_1 - v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 + w_2 \\ w_1 - w_2 \end{pmatrix} \\ &= f\left(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}\right). \end{aligned}$$

2. Die Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f\left(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right) = 2 \cdot v_1 + 5 \cdot v_2$$

ist eine Linearform, wie wir sofort nachrechnen.

3. Die Abbildung $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$g\left(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right) = v_1 \cdot v_2$$

ist nicht linear. So gilt etwa

$$\begin{aligned} g\left(3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) &= g\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}\right) \\ &= 18 \neq 6 = 3 \cdot g\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right). \end{aligned}$$ ◀

Achtung Um zu zeigen, dass $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ nicht linear ist, reicht es, ein Beispiel anzugeben, also entweder Vektoren $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ zu finden, für die

$$f(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) \neq f(\boldsymbol{v}) + f(\boldsymbol{w})$$

ist, oder einen Vektor $\boldsymbol{v}$ und einen Skalar r zu finden, sodass

$$f(r \cdot \boldsymbol{v}) \neq r \cdot f(\boldsymbol{v}).$$

Um dagegen zu zeigen, dass eine Abbildung linear ist, müssen die Linearitätseigenschaften für *alle* n-Vektoren $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ und alle Skalare $r \in \mathbb{R}$ nachgerechnet werden. ◀

Für jede lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ gilt

$$f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}.$$

(Beachten Sie dabei aber, dass der linke Nullvektor aus dem $\mathbb{R}^n$ ist und der rechte aus dem $\mathbb{R}^m$.)

Es gilt nämlich

$$f(\mathbf{0}) = f(0 \cdot \mathbf{0}) = 0 \cdot f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

Achtung In der Analysis heißt eine Abbildung $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ linear, wenn es Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$f(x) = ax + b.$$

Ist dabei $b = 0$, so sind das auch lineare Abbildungen im Sinne unserer Definition, denn dann gilt

$$\begin{aligned} f(x+y) &= ax + ay = f(x) + f(y) \\ f(r \cdot x) &= arx \qquad = r \cdot f(x) . \end{aligned}$$

Ist jedoch $b \neq 0$, so ist diese Abbildung nicht linear in unserem Sinne, denn dann ist etwa

$$f(2x) = a \cdot 2x + b \neq 2 \cdot (ax + b) = 2 \cdot f(x) .$$

Die linearen Abbildungen der Analysis sind allerdings nahe an den linearen Abbildungen, wie wir sie betrachten, da sie aus solchen durch eine Verschiebung in y-Richtung entstehen. In der linearen Algebra gibt es dafür einen eigenen Begriff:

Definition

Eine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ heißt **affin**, wenn es einen Vektor $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ und eine lineare Abbildung $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ gibt mit

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b} + g(\boldsymbol{x}) \qquad \text{für alle } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n .$$

Die linearen Abbildungen der Analysis sind also affin im Sinne dieser Definition. ◀

Lineare Abbildungen werden wir in Verbindung mit Matrizen (Kap. 12) noch intensiv studieren.

Wann sind Vektoren linear unabhängig?

In Ebene und Raum haben wir bereits kollineare und komplanare Vektoren kennengelernt. Die Verallgemeinerung dieser Begriffe ist die lineare Abhängigkeit.

Definition

Vektoren $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k \in \mathbb{R}^n$ heißen **linear abhängig**, wenn es Skalare $r_1, r_2, \ldots, r_k$ gibt, von denen mindestens einer von 0 verschieden ist, mit

$$r_1 \cdot \boldsymbol{v}_1 + r_2 \cdot \boldsymbol{v}_2 + \cdots + r_k \cdot \boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{0} .$$

Anderenfalls heißen sie **linear unabhängig**.

Die Bedingung für lineare Unabhängigkeit kann auch so formuliert werden: Sind $r_1, r_2, \ldots, r_k$ reelle Zahlen mit

$$r_1 \cdot \boldsymbol{v}_1 + r_2 \cdot \boldsymbol{v}_2 + \cdots + r_k \cdot \boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{0} ,$$

so muss schon gelten: $r_1 = r_2 = \cdots = r_k = 0$.

In Abb. 11.1 sind die beiden Vektoren $\boldsymbol{u}$ und $\boldsymbol{v}$ linear unabhängig, wohingegen die Vektoren $\boldsymbol{u}$ und $\boldsymbol{w}$ linear abhängig sind.

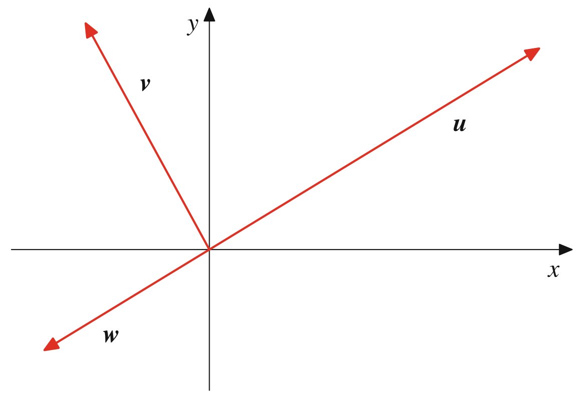

Abb. 11.1 Linear abhängige und linear unabhängige Vektoren

Beispiel

1. Die Vektoren $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}$ sind linear abhängig: Für $r_1 = 2$ und $r_2 = 1$ gilt
$$r_1 \cdot \boldsymbol{v}_1 + r_2 \cdot \boldsymbol{v}_2 = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$
2. Die Vektoren $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind linear abhängig: Für $r_1 = 1$ und $r_2 = -1$ und $r_3 = 1$ gilt
$$r_1 \cdot \boldsymbol{v}_1 + r_2 \cdot \boldsymbol{v}_2 + r_3 \cdot \boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{0} .$$
3. Die Vektoren $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sind linear unabhängig: Sind nämlich $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ Skalare mit
$$r_1 \cdot \boldsymbol{v}_1 + r_2 \cdot \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{0} ,$$
so bedeutet dies
$$\begin{pmatrix} r_1 \cdot 1 \\ r_1 \cdot 2 \\ r_1 \cdot 3 \\ r_1 \cdot 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_2 \cdot 3 \\ r_2 \cdot 2 \\ r_2 \cdot 1 \\ r_2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$
also
$$\begin{aligned} 1 \cdot r_1 + 3 \cdot r_2 &= 0 \\ 2 \cdot r_1 + 2 \cdot r_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$3 \cdot r_1 + 1 \cdot r_2 = 0$$
$$4 \cdot r_1 + 0 \cdot r_2 = 0\,.$$

Aus der letzten Gleichung folgt sofort: $r_1 = 0$. Setzt man das in die vorletzte Gleichung ein, so ergibt sich unmittelbar $r_2 = 0$, und damit sind $\boldsymbol{v}_1$ und $\boldsymbol{v}_2$ linear unabhängig. ◀

Beispiel

Die n-Vektoren $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind linear unabhängig: Sind nämlich $r_1, r_2, \ldots, r_n$ Skalare mit

$$r_1 \cdot \mathbf{e}_1 + r_2 \cdot \mathbf{e}_2 + \ldots + r_n \cdot \mathbf{e}_n = \mathbf{0}\,,$$

so bedeutet dies

$$\begin{pmatrix} r_1 \cdot 1 + r_2 \cdot 0 + \cdots + r_n \cdot 0 \\ r_1 \cdot 0 + r_2 \cdot 1 + \cdots + r_n \cdot 0 \\ \vdots \\ r_1 \cdot 0 + r_2 \cdot 0 + \cdots + r_n \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

also

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

und damit $r_1 = r_2 = \ldots = r_n = 0$. ◀

Ist $\boldsymbol{v}_l = \mathbf{0}$ für ein l, so sind die Vektoren $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ schon linear abhängig. Hierzu können wir etwa $r_l = 1$ und $r_i = 0$ für $i \neq l$ setzen und erhalten eine nichttriviale Linearkombination

$$r_1 \cdot \boldsymbol{v}_1 + \cdots + r_k \cdot \boldsymbol{v}_k = \mathbf{0}\,.$$

Teilmengen linear unabhängiger Vektoren

Sind die Vektoren $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ linear unabhängig, so auch jede Teilmenge davon, d. h., für $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_t \leq k$ sind auch die Vektoren $\boldsymbol{v}_{i_1}, \boldsymbol{v}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{v}_{i_t}$ linear unabhängig.

Die Vektoren $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ im $\mathbb{R}^4$ sind also linear unabhängig, denn sie sind Teil des Systems linear unabhängiger Vektoren $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_4$. Natürlich kann die lineare Unabhängigkeit in diesem Fall auch direkt nachgerechnet werden.

Achtung Die entsprechende Aussage für lineare Abhängigkeit ist nicht richtig. So sind etwa die Vektoren

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

linear abhängig, denn

$$1 \cdot \boldsymbol{v}_1 + 1 \cdot \boldsymbol{v}_2 - 4 \cdot \boldsymbol{v}_3 = \mathbf{0}\,,$$

aber die Teilmenge $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ dieser Vektoren ist linear unabhängig. In diesem Fall ist sogar jede echte Teilmenge der Vektoren $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ und $\boldsymbol{v}_3$ linear unabhängig.

Auch die Vektoren $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ sind linear unabhängig, wie man leicht nachrechnet, obwohl sie eine Teilmenge der linear abhängigen Vektoren

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bilden (wie wir oben nachgerechnet haben). ◀

Zwei Vektoren $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{w}$ sind genau dann linear abhängig, wenn einer von beiden ein Vielfaches des anderen ist. Gilt nämlich

$$r_1 \cdot \boldsymbol{v} + r_2 \cdot \boldsymbol{w} = \mathbf{0}$$

und ist etwa $r_1 \neq 0$, so erhalten wir

$$\boldsymbol{v} = -\frac{r_2}{r_1} \cdot \boldsymbol{w}$$

und analog natürlich für $r_2 \neq 0$. Sind sowohl $r_1 \neq 0$ als auch $r_2 \neq 0$, so lässt sich sogar jeder Vektor als Vielfaches des anderen schreiben.

Ist umgekehrt etwa $\boldsymbol{v}$ ein Vielfaches von $\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{v} = r \cdot \boldsymbol{w}$, so ist

$$(-1) \cdot \boldsymbol{v} + r \cdot \boldsymbol{w} = \mathbf{0}\,,$$

und damit sind die beiden Vektoren linear abhängig.

Kommentar Die lineare Unabhängigkeit von drei oder mehr Vektoren ist in der Regel schwer direkt festzustellen. Mit linearen Gleichungssystemen (Kap. 12) werden wir das richtige Werkzeug zur Behandlung dieser Frage noch kennenlernen. ◀

Teil III

Was ist ein Untervektorraum?

Oft ist es nicht der ganze $\mathbb{R}^n$, der uns interessiert, sondern nur eine Teilmenge, etwa die Lösungsmenge einer Gleichung oder eines Systems von Gleichungen. In der linearen Algebra sind dabei Teilmengen besonders interessant, die mit den Vektorraumoperationen des $\mathbb{R}^n$ wie folgt verträglich sind.

Definition

Eine Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ heißt **Untervektorraum** von $\mathbb{R}^n$, wenn gilt:

1. $U \neq \emptyset$.
2. Sind $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in U$, so ist auch $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} \in U$.
3. Sind $\boldsymbol{v} \in U$, $r \in \mathbb{R}$, so ist $r \cdot \boldsymbol{v} \in U$.

Beispiel

Ist $U = \mathbb{R}^n$, so ist U ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$. Offensichtlich sind hierfür nämlich die Bedingungen erfüllt.

Ebenso ist $U = \{\mathbf{0}\} \subset \mathbb{R}^n$, die Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, die nur aus dem Nullvektor besteht, ein Untervektorraum.

Diese Untervektorräume werden auch **triviale Untervektorräume** genannt. ◄

Beispiel

Ist $U = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^4$, so ist U ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^4$.

Dagegen ist $M = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R} \quad \text{und } r \geq 0 \right\} \subset \mathbb{R}^4$ kein Untervektorraum. Es ist nämlich $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in M$, aber nicht

$$(-1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$ ◄

Beispiel

Ist $V = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ r \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^4$, so ist V kein Untervektorraum von $\mathbb{R}^4$. Es ist nämlich $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in V$, aber nicht

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$ ◄

Achtung Um zu zeigen, dass eine Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ *kein* Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$ ist, reicht es, ein Beispiel zu finden, in dem eine der definierenden Eigenschaften eines Untervektorraumes nicht erfüllt ist. Es reicht also, entweder zu zeigen, dass U leer ist oder dass es zwei Vektoren $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in U$ gibt, für die $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} \notin U$, oder dass es einen Vektor $\boldsymbol{v} \in U$ und eine reelle Zahl r gibt mit $r \cdot \boldsymbol{v} \notin U$.

Um zu zeigen, dass eine Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$ ist, müssen dagegen alle definierenden Eigenschaften für alle Vektoren $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in U$ bzw. alle reellen Zahlen r nachgewiesen werden. ◄

Beispiel

Jede Gerade in der Ebene, die durch den Koordinatenursprung geht, ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$. Außer den trivialen Untervektträumen sind das auch die einzigen Untervektorräume von $\mathbb{R}^2$. ◄

Beispiel

Ist $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ ein beliebiger Vektor, so ist

$$U := \{r \cdot \boldsymbol{v} \mid r \in \mathbb{R}\}$$

ein Untervektorraum (auch, falls $\boldsymbol{v}$ der Nullvektor ist). ◄

Achtung Eine beliebige Gerade G in der Ebene, gegeben in der Form

$$G : \boldsymbol{s} + \lambda \cdot \boldsymbol{g} = \{\boldsymbol{s} + \lambda \cdot \boldsymbol{g} \mid \lambda \in \mathbb{R}\},$$

ist genau dann ein Untervektorraum, wenn $\boldsymbol{s}$ ein Vielfaches von $\boldsymbol{g}$ ist (was gleichbedeutend damit ist, dass die Gerade durch den Koordinatenursprung (0, 0) geht).

So ist etwa die Gerade

$$G = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

kein Untervektorraum, da sie zwar den Vektor $\boldsymbol{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ enthält, nicht aber den Vektor $2 \cdot \boldsymbol{s} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$. Dieser kann nicht in der Form

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

geschrieben werden. Aus der Betrachtung der ersten Komponente folgt nämlich, dass dann $\lambda = \frac{1}{2}$ sein muss, aber in diesem Fall ist $4 \neq 2 + \frac{1}{2} \cdot 1$, also stimmt die zweite Komponente nicht. Dagegen ist die Gerade

$$H = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$, denn hierbei handelt es sich um eine Ursprungsgerade. Diese Gerade lässt sich auch schreiben als

$$H = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

Ist $U \subset \mathbb{R}^n$ ein Untervektorraum und $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor, so nennen wir die Menge

$$M = \boldsymbol{v} + U = \{\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} \mid \boldsymbol{u} \in U\}$$

einen affinen Unterraum von $\mathbb{R}^n$. Eine beliebige ebene Gerade ist also ein affiner Unterraum von $\mathbb{R}^2$. ◀

Beispiel

Ist $E = \left\{ \begin{pmatrix} r \\ s \\ -r+s \end{pmatrix} \mid r, s \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^3$ (Abb. 11.2), so ist E ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$.

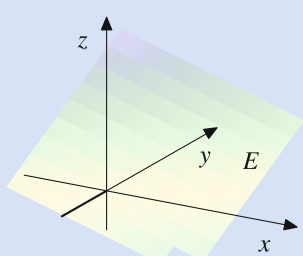

Abb. 11.2 Ebene und Untervektorraum

Ganz allgemein ist jede Ebene im Raum, die den Koordinatenursprung enthält, ein Untervektorraum. ◀

Bild und Kern linearer Abbildungen sind Untervektorräume

Untervektorräume spielen eine wichtige Rolle beim Studium linearer Abbildungen. Dazu betrachten wir eine lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m .$$

Definition

- $\operatorname{Kern}(f) := \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n | f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}\}$ heißt der **Kern** der linearen Abbildung f.
- $\operatorname{Bild}(f) := \{\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^m |$ Es gibt $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ mit $f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w}\}$ heißt das **Bild** der linearen Abbildung f.

Beispiel

Die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$f\left(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} v_1 - v_2 \\ -2v_1 + 2v_2 \end{pmatrix}$$

ist linear mit

$$\operatorname{Kern}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} r \\ r \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R} \right\} ,$$

$$\operatorname{Bild}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} r \\ -2r \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R} \right\} .$$

Ein Vektor $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ ist nämlich genau dann im Kern der Abbildung f, wenn

$$v_1 - v_2 = 0, \quad -2v_1 + 2v_2 = 0 ,$$

und das ist genau dann der Fall, wenn $v_1 = v_2$. Wählen wir also für v_2 ein beliebiges r, so muss $\boldsymbol{v}$ die Gestalt

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} r \\ r \end{pmatrix}$$

haben, und umgekehrt ist auch jeder Vektor dieser Gestalt im Kern von f.

Ist $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ im Bild von f, so gibt es $v_1, v_2 \in \mathbb{R}$ mit

$$w_1 = v_1 - v_2, \quad w_2 = -2v_1 + 2v_2 ,$$

sodass $w_2 = -2w_1$, und damit hat $\boldsymbol{w}$ eine Gestalt wie behauptet. Ist umgekehrt $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} r \\ -2r \end{pmatrix}$ gegeben, so gilt hierfür $\boldsymbol{w} = f\left(\begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix}\right)$, und deshalb ist $\boldsymbol{w}$ im Bild von f.

Ist $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, so ist $\boldsymbol{w} \notin \operatorname{Bild}(f)$. Damit ist $f^{-1}(\boldsymbol{w}) = \emptyset$.

Ist $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$, so ist $\boldsymbol{w} \in \operatorname{Bild}(f)$ und

$$f^{-1}(\boldsymbol{w}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \operatorname{Kern}(f)\,.$$ ◄

Kern und Bild einer linearen Abbildung werden in Mathematischer Hintergrund 11.1 noch genauer untersucht.

Einen systematischen Ansatz zur Bestimmung von Kern, Bild und Urbildmengen werden wir im Rahmen der Matrizenrechnung kennenlernen.

Was sind Erzeugendensysteme und Basen von Untervektorräumen?

Gesucht ist häufig eine effiziente und knappe Beschreibung von Untervektorräumen mit möglichst wenigen Daten. Dazu geben wir uns einen Untervektorraum $U \subseteq \mathbb{R}^n$ vor.

Definition

Vektoren $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ heißen ein **Erzeugendensystem** von U, wenn gilt:

1. $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m \in U$.
2. Zu jedem $\boldsymbol{w} \in U$ gibt es Skalare $r_1, r_2, \ldots, r_m$ mit

$$\boldsymbol{w} = r_1 \cdot \boldsymbol{v}_1 + r_2 \cdot \boldsymbol{v}_2 + \ldots + r_m \cdot \boldsymbol{v}_m\,.$$

Wir sagen in diesem Fall auch, die Vektoren $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ erzeugen U.

Beispiel

Die Vektoren $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $\ldots$, $\mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ erzeugen $U = \mathbb{R}^n$ (als Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$). Für einen beliebigen n-Vektor $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ gilt nämlich

$$\boldsymbol{v} = v_1 \cdot \mathbf{e}_1 + v_2 \cdot \mathbf{e}_2 + \cdots + v_n \cdot \mathbf{e}_n\,.$$ ◄

Beispiel

Der Untervektorraum $U = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \, r \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^4$ wird erzeugt von dem Vektor $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ebenso wird U erzeugt von $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, und auch die Vektoren $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ zusammen bilden ein Erzeugendensystem von U. Erzeugendensysteme sind also nicht eindeutig und können unterschiedlich viele Elemente enthalten. ◄

Beispiel

Ist $U = \{\mathbf{0}\}$ der Nullvektorraum, so bildet $\mathbf{0}$ ein Erzeugendensystem von U. Es ist aber auch üblich, die leere Menge als Erzeugendensystem von U zu betrachten. ◄

Beispiel

Die Ebene E durch die Punkte $O = (0,0,0)$, $P = (1,2,3)$ und $Q = (-3,2,-1)$ enthält $(0,0,0)$, ist also ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$. Er wird erzeugt von

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

also von zwei Vektoren, die (mit $\mathbf{0}$ als Stützvektor) E auch als Ebene erzeugen. Ebenso bildet jedes andere System von Vektoren, das E als Ebene aufspannt, ein Erzeugendensystem von E als Untervektorraum, etwa

$$\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \; \boldsymbol{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \; \boldsymbol{w}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$ ◄

Zwei Vektoren $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ in $\mathbb{R}^3$ spannen eine Ebene E durch den Koordinatenursprung auf, falls sie nicht kollinear sind. Damit bilden sie ein Erzeugendensystem dieses Vektorraumes E (Abb. 11.3).

11.1 Mathematischer Hintergrund: Kern und Bild einer linearen Abbildung

Wir betrachten eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ und wollen nachweisen:

- $\operatorname{Kern}(f)$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$.
- $\operatorname{Bild}(f)$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^m$.

Die Untervektorraumaxiome sind dabei mithilfe der Linearität von f leicht nachzuweisen: Beide Mengen sind nicht leer, denn für den Nullvektor $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ gilt $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, wie wir schon gesehen haben. Damit ist gezeigt, dass für $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ gilt: $\mathbf{0} \in \operatorname{Kern}(f)$, und dass für $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^m$ gilt: $\mathbf{0} = f(\mathbf{0}) \in \operatorname{Bild}(f)$. Beachten Sie dabei, dass $\mathbf{0} \in \operatorname{Kern}(f)$ der Nullvektor im $\mathbb{R}^n$ ist und $\mathbf{0} \in \operatorname{Bild}(f)$ der Nullvektor im $\mathbb{R}^m$, dass es sich also im Allgemeinen um unterschiedliche Nullvektoren handelt.

Wir zeigen zunächst, dass der Kern von f ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$ ist: Sind $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in \operatorname{Kern}(f)$ und ist $r \in \mathbb{R}$, so gilt aufgrund der Linearität von f

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) &= f(\boldsymbol{v}_1) + f(\boldsymbol{v}_2) = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0} \\ f(r \cdot \boldsymbol{v}_1) &= r \cdot f(\boldsymbol{v}_1) = r \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}\,, \end{aligned}$$

und damit sind $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 \in \operatorname{Kern}(f)$ und $r \cdot \boldsymbol{v}_1 \in \operatorname{Kern}(f)$, also handelt es sich hierbei um einen Untervektorraum (von $\mathbb{R}^n$).

Ähnlich zeigen wir, dass das Bild von f ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^m$ ist: Sind $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2 \in \operatorname{Bild}(f)$ und ist $r \in \mathbb{R}$, so gibt es Vektoren $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in \mathbb{R}^n$ mit $f(\boldsymbol{v}_l) = \boldsymbol{w}_l$ $(l = 1, 2)$, und damit gilt aufgrund der Linearität von f

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) &= f(\boldsymbol{v}_1) + f(\boldsymbol{v}_2) = \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 \\ f(r \cdot \boldsymbol{v}_1) &= r \cdot f(\boldsymbol{v}_1) = r \cdot \boldsymbol{w}_1\,, \end{aligned}$$

und damit sind sowohl $\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 \in \operatorname{Bild}(f)$ als auch $r \cdot \boldsymbol{w}_1 \in \operatorname{Bild}(f)$, also handelt es sich auch hierbei um einen Untervektorraum (von $\mathbb{R}^m$).

Ist $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^m \setminus \{\mathbf{0}\}$ ein beliebiger (vom Nullvektor verschiedener) Vektor, so ist die Menge

$$f^{-1}(\boldsymbol{w}) := \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n | f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w}\}$$

der Urbildpunkte von $\boldsymbol{w}$ niemals ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$. So kann es schon vorkommen, dass $f^{-1}(\boldsymbol{w})$ die leere Menge ist (etwa wenn f die Nullabbildung ist oder, allgemeiner, wenn $\boldsymbol{w} \notin \operatorname{Bild}(f)$). Falls $f^{-1}(\boldsymbol{w}) \neq \emptyset$, so gibt es ein Element $\boldsymbol{v}$ in $f^{-1}(\boldsymbol{w})$, und hierfür gilt

$$f(2 \cdot \boldsymbol{v}) = 2 \cdot f(\boldsymbol{v}) = 2 \cdot \boldsymbol{w}\,.$$

Da $\boldsymbol{w} \neq \mathbf{0}$, ist also $2 \cdot \boldsymbol{w} \neq \boldsymbol{w}$ und daher $2 \cdot \boldsymbol{v} \notin f^{-1}(\boldsymbol{w})$. Damit sind die Untervektorraumaxiome für diese Teilmenge nicht erfüllt.

Für $f^{-1}(\boldsymbol{w})$ können also zwei Fälle auftreten:

1. $f^{-1}(\boldsymbol{w}) = \emptyset$: Das ist genau dann der Fall, wenn $\boldsymbol{w} \notin \operatorname{Bild}(f)$.
2. $f^{-1}(\boldsymbol{w}) \neq \emptyset$: Ist in diesem Fall $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ ein beliebiger Vektor mit $f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w}$, so gilt

   $$f^{-1}(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{v} + \operatorname{Kern}(f) = \{\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} \mid \boldsymbol{u} \in \operatorname{Kern}(f)\}\,.$$

   Für jedes Element $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{v} + \operatorname{Kern}(f)$ (also für jedes Element $\boldsymbol{u} \in \operatorname{Kern}(f)$) gilt nämlich einerseits

   $$f(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}) = f(\boldsymbol{v}) + f(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{w} + \mathbf{0} = \boldsymbol{w}\,,$$

   und andererseits erfüllt jeder Vektor $\boldsymbol{x} \in f^{-1}(\boldsymbol{w})$:

   $$f(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w} - \boldsymbol{w} = \mathbf{0}\,,$$

   sodass $\boldsymbol{u} := \boldsymbol{x} - \boldsymbol{v} \in \operatorname{Kern}(f)$ und $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$.

Falls $\boldsymbol{w} \in \operatorname{Bild}(f)$, so entsteht die Menge $f^{-1}(\boldsymbol{w})$ aus dem Untervektorraum $\operatorname{Kern}(f)$ durch eine Verschiebung um einen Vektor. Allgemein heißt eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$, die von der Form

$$A = \boldsymbol{v} + U$$

mit einem Untervektorraum $U \subset \mathbb{R}^n$ ist, **affiner Unterraum** von $\mathbb{R}^n$. Die Mengen $f^{-1}(\boldsymbol{w}) \subset \mathbb{R}^n$ sind also entweder leer oder affine Unterräume von $\mathbb{R}^n$. Umgekehrt ist auch jeder affine Unterraum von $\mathbb{R}^n$ von der Form $f^{-1}(\boldsymbol{w})$ für eine geeignete lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ und ein $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^m$.

Ein affiner Unterraum $A = \boldsymbol{v} + U$ ist genau dann ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$, wenn $\boldsymbol{v} \in U$.

Allgemeine Geraden $G = \boldsymbol{s} + \lambda \cdot \boldsymbol{g}$ in der Ebene sind affine Unterräume von $\mathbb{R}^2$ (mit $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{s}$ und $U = \mathbb{R} \cdot \boldsymbol{g}$). Entsprechend sind allgemeine Geraden und Ebenen im Raum affine Unterräume von $\mathbb{R}^3$. Umgekehrt sind auch alle affinen Unterräume von $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ (außer den trivialen Untervektorräumen) von dieser Form.

Ein affiner Unterraum A von $\mathbb{R}^n$ wird immer bestimmt durch einen Vektor $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ und einen Untervektorraum $U \subset \mathbb{R}^n$. Dabei ist der Untervektorraum U eindeutig bestimmt, der Vektor $\boldsymbol{v}$ jedoch nicht. Das haben wir schon bei Geraden gesehen, die ja viele Stützvektoren haben können.

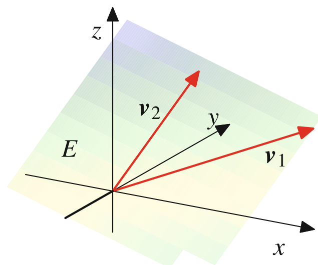

Abb. 11.3 Ein Erzeugendensystem einer Ebene

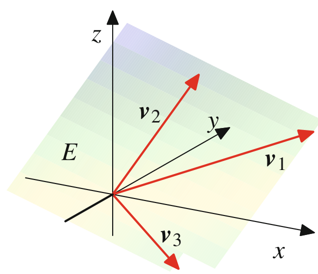

Abb. 11.4 Ein weiteres Erzeugendensystem einer Ebene

Insbesondere können also zwei Vektoren im $\mathbb{R}^3$ niemals den ganzen $\mathbb{R}^3$ aufspannen, da es immer Vektoren gibt, die nicht in einer vorgegebenen Ebene liegen. Um den ganzen $\mathbb{R}^3$ zu erzeugen, sind also mindestens drei Vektoren nötig. Allerdings kann es auch dann sein, dass die drei Vektoren nur eine Ebene, also einen echten Untervektorraum, erzeugen (Abb. 11.4). Das ist dann der Fall, wenn die drei Vektoren komplanar (aber nicht kollinear) sind.

Wir betrachten nun Vektoren $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k \in \mathbb{R}^n$ und setzen

$$U = \left\{ \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{Es gibt } r_1, \ldots, r_k \in \mathbb{R} \\ \text{mit } \boldsymbol{v} = r_1 \cdot \boldsymbol{v}_1 + \cdots + r_k \cdot \boldsymbol{v}_k \end{array} \right\}.$$

Dann gilt:

Vektoren erzeugen einen Untervektorraum

Die Menge U ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$.

Der Untervektorraum U heißt das **Erzeugnis** von $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ oder der von $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ **aufgespannte Unterraum** von $\mathbb{R}^n$. Wir schreiben hierfür entweder $\mathrm{Span}(\{\boldsymbol{v}_i\}_{i=1,\ldots,k})$ oder $\langle\{\boldsymbol{v}_i\}_{i=1,\ldots,k}\rangle$.

Die Untervektorraumeigenschaften sind sehr leicht nachzurechnen. Offensichtlich ist U nicht leer. Wir zeigen, dass U abgeschlossen unter Addition ist. Sind dazu $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{w}$ in U, so schreiben wir

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} &= r_1 \cdot \boldsymbol{v}_1 + \cdots + r_k \cdot \boldsymbol{v}_k \\ \boldsymbol{w} &= s_1 \cdot \boldsymbol{v}_1 + \cdots + s_k \cdot \boldsymbol{v}_k . \end{aligned}$$

Damit ist

$$\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = (r_1 + s_1) \cdot \boldsymbol{v}_1 + \cdots + (r_k + s_k) \cdot \boldsymbol{v}_k ,$$

und da $r_i + s_i \in \mathbb{R}$, folgt, dass $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} \in U$. Die Abgeschlossenheit unter Skalarmultiplikation zeigt man ähnlich.

Beispiel

Wir betrachten die Vektoren

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

im $\mathbb{R}^3$. Dann gilt hierfür

$$\langle\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \, x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\} .$$

Klar ist dabei, dass

$$\langle\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}\rangle \subset \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \, x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\} ,$$

denn mit $\boldsymbol{v}_1$ und $\boldsymbol{v}_2$ wird auch jede Linearkombination von $\boldsymbol{v}_1$ und $\boldsymbol{v}_2$ in der letzten Komponente eine 0 stehen haben. Ist umgekehrt ein Vektor $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ gegeben, so können wir

$$\boldsymbol{v} = (-x_1) \cdot \boldsymbol{v}_1 + \frac{x_2 + 2x_1}{4} \cdot \boldsymbol{v}_2$$

schreiben und erhalten $\boldsymbol{v} \in \langle\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}\rangle$, also

$$\langle\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}\rangle \supset \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \, x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\} ,$$

und damit Gleichheit der beiden Mengen. ◀

Erzeugendensysteme eines Untervektorraumes haben den großen Nachteil, unterschiedlich lang sein zu können. Diesen Mangel wollen wir nun als Nächstes ansprechen.

Definition

Die Vektoren $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m \in U$ heißen **Basis** von U, wenn sie ein Erzeugendensystem von U bilden und wenn sie linear unabhängig sind.

Teil III

Beispiel

Die Vektoren $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ bilden eine Basis von $\mathbb{R}^n$. Wir haben bereits nachgerechnet, dass sie linear unabhängig sind und auch schon gezeigt, dass sie den $\mathbb{R}^n$ erzeugen.

Wir bezeichnen $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ als **Standardbasis des $\mathbb{R}^n$**. ◄

Beispiel

Ist E die Ebene durch $O = (0, 0, 0)$, $P = (1, 2, 3)$ und $Q = (-3, 2, -1)$, die wir schon weiter oben betrachtet haben, so bilden die Vektoren

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

eine Basis von E. Wie wir bereits gesehen haben, erzeugen sie E, und sie sind linear unabhängig, da keiner der Vektoren ein Vielfaches des anderen ist. Dagegen bilden die Vektoren

$$\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{w}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

keine Basis von E. Sie erzeugen zwar E, aber es gilt

$$2 \cdot \boldsymbol{w}_1 + (-1) \cdot \boldsymbol{w}_2 + (-1) \cdot \boldsymbol{w}_3 = \mathbf{0},$$

und damit sind sie nicht linear unabhängig. ◄

Jeder Vektorraum besitzt eine Basis

Zentral für die Behandlung von Vektorräumen ist folgende Aussage (mit der wir uns in Abschn. 11.3 noch genauer beschäftigen werden):

Basen von Untervektorräumen

Für einen Untervektorraum U von $\mathbb{R}^n$ gilt:

1. Ist $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_m\}$ ein beliebiges Erzeugendensystem von U, so enthält dieses Erzeugendensystem eine Basis von U, es gibt also ein $t \le m$ und Indizes $1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_t \le m$, sodass die Vektoren $\boldsymbol{v}_{i_1}, \boldsymbol{v}_{i_2}, \dots, \boldsymbol{v}_{i_t}$ eine Basis von U bilden.
2. U hat eine Basis.
3. Je zwei Basen von U sind gleich lang: Sind $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_m\}$ und $\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \dots, \boldsymbol{w}_t\}$ Basen von U, so gilt $m = t$.

Dieses Ergebnis rechtfertigt die folgende Festsetzung:

Definition

Die Länge einer Basis eines Untervektorraumes U heißt die **Dimension** von U und wird mit $\dim(U)$ bezeichnet.

Beispiel

1. Der $\mathbb{R}^n$ hat die Dimension n, denn $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ bilden eine Basis von $\mathbb{R}^n$.
2. Ist E die Ebene durch $O = (0, 0, 0)$, $P = (1, 2, 3)$ und $Q = (-3, 2, -1)$, die wir im vorhergehenden Abschnitt untersucht haben, so hat E die Dimension 2, da wir schon gesehen haben, dass die beiden Vektoren
$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$
eine Basis von E bilden. Es ist also $\dim(E) = 2$.
Die ebenfalls bereits betrachteten Vektoren $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2$ und $\boldsymbol{w}_3$ bilden ein Erzeugendensystem von E, aber keine Basis. Die Vektoren $\boldsymbol{w}_2$ und $\boldsymbol{w}_3$ dagegen bilden eine in diesem Erzeugendensystem enthaltene Basis von E.
Jede Ebene durch den Koordinatenursprung wird erzeugt von zwei nichtkollinearen Vektoren $\boldsymbol{p}_1$ und $\boldsymbol{p}_2$. Da sie nichtkollinear sind, sind sie linear unabhängig, und daher ist jede Ebene durch den Koordinatenursprung ein Untervektorraum der Dimension 2.
3. Zu einem beliebigen Vektor $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ betrachten wir den Untervektorraum
$$U := \{r \cdot \boldsymbol{v} \,|\, r \in \mathbb{R}\},$$
der von dem Vektor $\boldsymbol{v}$ in $\mathbb{R}^n$ erzeugt wird. Ist $\boldsymbol{v} \ne \mathbf{0}$, so ist $\boldsymbol{v}$ eine Basis von V und $\dim(V) = 1$.
4. Wie wir festgesetzt haben, bildet die leere Menge ein Erzeugendensystem des Nullvektorraumes $U = \{\mathbf{0}\}$. Die leere Menge ist auch ein System linear unabhängiger Vektoren (da keine Bedingungen zu verifizieren sind), und daher ist die leere Menge eine Basis des Nullvektorraumes. Damit gilt $\dim(\{\mathbf{0}\}) = 0$.
Der Nullvektor $\mathbf{0}$ dagegen ist keine Basis von U, denn er ist nicht linear unabhängig (es gilt etwa $1 \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$). ◄

11.2 Mathematischer Hintergrund: Die Menge $\mathbb{C}^n$ als komplexer Vektorraum

Wir haben uns nun intensiv mit n-Tupeln reeller Zahlen beschäftigt. Das ist naheliegend, denn die reellen Zahlen sind auch die Zahlen, mit denen üblicherweise gearbeitet wird. Allerdings haben wir neben dem Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen auch den Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen kennengelernt, und in vielerlei Hinsicht lässt sich mit $\mathbb{C}$ genau so gut arbeiten wie mit $\mathbb{R}$ (wenn es um die Lösbarkeit von Gleichungen geht, sogar noch besser). Speziell können wir auch die n-Tupel $\mathbb{C}^n$ komplexer Zahlen betrachten:

Ein komplexer n-Vektor ist ein n-Tupel $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ mit komplexen Zahlen $v_1, \ldots, v_n$. Skalarmultiplikation und Addition komplexer n-Vektoren sind analog zur Addition und Skalarmultiplikation reeller n-Vektoren komponentenweise erklärt:

$$a \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot v_1 \\ \vdots \\ a \cdot v_n \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ \vdots \\ v_n + w_n \end{pmatrix}$$

Das ist möglich, da wir ja zwei komplexe Zahlen addieren oder multiplizieren können. Damit kann sofort nachgerechnet werden, dass die Eigenschaften des $\mathbb{R}^n$, entsprechend übertragen, auch für den $\mathbb{C}^n$ gelten (wobei wir hier immer Skalare aus $\mathbb{C}$ betrachten). Der $\mathbb{C}^n$ heißt daher auch **komplexer Vektorraum** der Dimension n.

Eine Teilmenge $U \subset \mathbb{C}^n$ heißt **komplexer Untervektorraum** des $\mathbb{C}^n$, wenn gilt:

1. $U \neq \emptyset$.
2. Für $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in U$ ist auch $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} \in U$.
3. Für $\boldsymbol{v} \in U$ und $a \in \mathbb{C}$ ist auch $a \cdot \boldsymbol{v} \in U$.

Die Menge

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \mid v_1 + \mathrm{i} \cdot v_2 + (1 - \mathrm{i}) \cdot v_3 = 0 \right\}$$

ist ein komplexer Untervektorraum des $\mathbb{C}^3$.

Die Aussagen über reelle Untervektorräume des $\mathbb{R}^n$ übertragen sich auf komplexe Untervektorräume des $\mathbb{C}^n$.

Auch die Begriffe der linearen Unabhängigkeit und des Erzeugendensystems haben ihre Entsprechung im Komplexen: Komplexe n-Vektoren $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k \in \mathbb{C}^n$ heißen (komplex) linear abhängig, wenn es komplexe Zahlen $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{C}$ gibt, mindestens eine davon von 0 verschieden, sodass

$$a_1 \cdot \boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_k \cdot \boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{0}\,.$$

Anderenfalls heißen sie linear unabhängig. Beachten Sie dabei aber, dass der Begriff der komplexen linearen Unabhängigkeit eine stärkere Bedingung stellt als der der reellen linearen Unabhängigkeit. Betrachten wir etwa die beiden Vektoren $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ und $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$, so sind sie reell linear unabhängig, denn es gibt keine reellen Zahlen r, s mit $r + s \cdot \mathrm{i} = 0$. Allerdings ist

$$\boldsymbol{v} + \mathrm{i} \cdot \boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}\,,$$

und daher sind sie im Komplexen linear abhängig.

Komplexe Vektoren $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k \in \mathbb{C}^n$ bilden ein Erzeugendensystem eines komplexen Untervektorraumes U, wenn gilt:

1. $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k \in U$.
2. Ist $\boldsymbol{w} \in U$, so gibt es komplexe Zahlen $a_1, \ldots, a_k$ mit

$$\boldsymbol{w} = a_1 \cdot v_1 + \cdots + a_k \cdot v_k\,.$$

Komplexe n-Vektoren $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k \in \mathbb{C}^n$ bilden eine Basis eines komplexen Untervektorraumes U, wenn sie ein Erzeugendensystem von U bilden und (komplex) linear unabhängig sind.

Mit diesen Notationen können wir auch die komplexe Dimension $\dim_{\mathbb{C}}(U)$ eines komplexen Untervektorraumes $U \subset \mathbb{C}^n$ als die Länge einer komplexen Basis dieses Untervektorraumes einführen. Hierfür gilt insbesondere

$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n) = n\,,$$

denn eine Basis von $\mathbb{C}^n$ ist gegeben durch die Vektoren

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \cdots \quad \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Es sind also die gleichen Vektoren wie im $\mathbb{R}^n$ (jetzt aber aufgefasst als Elemente von $\mathbb{C}^n$), die diese Basis bilden.

Eine Abbildung $f : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^m$ heißt $\mathbb{C}$-linear, wenn

1. $f(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = f(\boldsymbol{v}) + f(\boldsymbol{w})$ für alle $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{C}^n$,
2. $f(a \cdot \boldsymbol{v}) = a \cdot f(\boldsymbol{v})$ für alle $\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n$ und alle $a \in C$.

Setzen wir

- $\mathrm{Kern}(f) = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n \mid f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}\}$,
- $\mathrm{Bild}(f) = \{\boldsymbol{w} \in \mathbb{C}^m \mid$ Es gibt $\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n$ mit $f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w}\}$,

so sind $\mathrm{Kern}(f) \subset \mathbb{C}^n$ und $\mathrm{Bild}(f) \subset \mathbb{C}^m$ komplexe Untervektorräume.

Teil III

Teil III

11.2 Euklidische Vektorräume

Der $\mathbb{R}^n$ hat viele Eigenschaften, die wir an Vektoren in der Ebene oder im Raum schätzen. Einige geometrische Konstruktionen und Interpretationen ebener und räumlicher Vektoren (wie etwa Vektorprodukt oder Spatprodukt) lassen sich nicht oder zumindest nicht in naheliegender Weise verallgemeinern, andere wiederum übertragen sich leicht in den höherdimensionalen Fall, etwa das Skalarprodukt.

Das Skalarprodukt von Vektoren bestimmt Längen und Winkel

Definition

Für zwei n-Vektoren $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$ heißt

$$\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle := v_1 w_1 + \cdots + v_n w_n$$

das **Skalarprodukt** von $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{w}$.

Es ist also etwa

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 1 \cdot 2 = 22\,.$$

Achtung In der Analysis wird das Skalarprodukt von $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{w}$ mit $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}$ bezeichnet. Um Verwechslungen mit anderen Produktoperationen zu vermeiden, verwenden wir in der linearen Algebra jedoch die Notation mit den spitzen Klammern. ◀

In Abschn. 11.3 werden wir noch allgemeinere Vektorräume kennenlernen, für die es kein (offensichtliches) Skalarprodukt gibt. Diese Eigenschaft ist also eine Besonderheit und wird daher durch eine eigene Bezeichnung ausgezeichnet.

Definition

Der Vektorraum $\mathbb{R}^n$ zusammen mit dem Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$ heißt ***n*-dimensionaler euklidischer Raum**.

Einige Eigenschaften folgen unmittelbar aus der Definition.

Rechenregeln für das Skalarprodukt

Für $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2 \in \mathbb{R}^n$ und $r \in \mathbb{R}$ erhalten wir:

1. Es gilt das Kommutativgesetz:

$$\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle = \langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v} \rangle$$

2. Es gilt das Distributivgesetz:

$$\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 \rangle = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_1 \rangle + \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_2 \rangle$$

3. Skalarprodukte sind verträglich mit Skalarmultiplikation:

$$\langle r \cdot \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle = r \cdot \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle = \langle \boldsymbol{v}, r \cdot \boldsymbol{w} \rangle$$

4. $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle = |\boldsymbol{v}|^2$

Wie im zwei- oder dreidimensionalen Fall gilt auch hier der Satz von Cauchy-Schwarz.

Satz von Cauchy-Schwarz

Für $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n$ gilt:

1. $|\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle| \le |\boldsymbol{v}| \cdot |\boldsymbol{w}|$.
2. Genau dann sind die Vektoren $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{w}$ linear abhängig, wenn $|\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle| = |\boldsymbol{v}| \cdot |\boldsymbol{w}|$.

Der Beweis hierfür kann (wie schon im Dreidimensionalen) wortwörtlich aus dem zweidimensionalen Fall übertragen werden.

Aus den Regeln ergeben sich sofort einige interessante Konsequenzen für die Länge von Vektoren.

Die Dreiecksungleichung

Für Vektoren $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ und einen Skalar $r \in \mathbb{R}$ gilt:

1. $|r \cdot \boldsymbol{v}| = |r| \cdot |\boldsymbol{v}|$
2. $|\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}| \le |\boldsymbol{v}| + |\boldsymbol{w}|$

In der Tat gilt

$$|r \cdot \boldsymbol{v}|^2 = \langle r \cdot \boldsymbol{v}, r \cdot \boldsymbol{v} \rangle = r^2 \cdot \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle = r^2 \cdot |\boldsymbol{v}|^2\,.$$

und durch Ziehen der Wurzel folgt die erste Behauptung.

Für die zweite Aussage gehen wir ähnlich vor:

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}|^2 &= \langle \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} \rangle \\ &= \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle + \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle + \langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v} \rangle + \langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{w} \rangle \\ &= |\boldsymbol{v}|^2 + 2 \cdot \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle + |\boldsymbol{w}|^2 \\ &\le |\boldsymbol{v}|^2 + 2 \cdot |\boldsymbol{v}| \cdot |\boldsymbol{w}| + |\boldsymbol{w}|^2 \\ &= (|\boldsymbol{v}| + |\boldsymbol{w}|)^2\,. \end{aligned}$$

wobei wir für die Ungleichung den Satz von Cauchy-Schwarz benutzt haben. Wurzelziehen liefert nun die Behauptung.

Kommentar Aus der ersten Bedingung des Satzes von Cauchy-Schwarz folgt wieder, dass es ein $\varphi \in [0, \pi]$ mit

$$|\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle| = \cos(\varphi)|\boldsymbol{v}| \cdot |\boldsymbol{w}|$$

gibt. Dieses φ heißt auch hier der **Winkel** zwischen $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{w}$. ◄

Vektoren können senkrecht aufeinander stehen

Wir benutzen das Skalarprodukt, um auch im höherdimensionalen Fall zu erklären, wann Vektoren senkrecht aufeinander stehen.

Definition

Zwei Vektoren $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n$ heißen **orthogonal**, wenn

$$\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle = 0 \,.$$

Wir sagen in diesem Fall auch, dass $\boldsymbol{v}$ senkrecht auf $\boldsymbol{w}$ steht, und schreiben $\boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{w}$.

Beispiel

Die Vektoren $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ sind orthogonal. ◄

Beispiel

Die Vektoren $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind paarweise orthogonal, d. h., für $i \neq j$ gilt

$$\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = 0 \,.$$ ◄

Definition

Ist $U \subset \mathbb{R}^n$ ein Untervektorraum, so heißt die Menge

$$U^{\perp} = \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n | \, \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = 0 \text{ für alle } \boldsymbol{v} \in V\}$$

das **orthogonale Komplement** von V.

Dimension des orthogonalen Komplements

Ist $U \subset \mathbb{R}^n$ ein Untervektorraum der Dimension l, so ist $U^{\perp} \subset \mathbb{R}^n$ ein Untervektorraum der Dimension $n - l$.

Beweis Wir weisen nach, dass $U^{\perp}$ ein Untervektorraum ist:

1. Sicherlich ist $\mathbf{0} \in U^{\perp}$, und damit ist $U^{\perp}$ nicht leer.
2. Sind $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \in U^{\perp}$ und ist $\boldsymbol{v} \in U$ beliebig, so gilt
$$\langle \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v} \rangle = \langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v} \rangle + \langle \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v} \rangle = 0 \,,$$
und damit ist $\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 \in U^{\perp}$.
3. Ist $\boldsymbol{u} \in U^{\perp}$ und $r \in \mathbb{R}$ und ist $\boldsymbol{v} \in U$ beliebig, so gilt
$$\langle r \cdot \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = r \cdot \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = 0 \,,$$
und damit ist $r \cdot \boldsymbol{u} \in U^{\perp}$.

Die Dimensionsformel wird sich aus dem Gram-Schmidt-Orthonormalisierungsverfahren ergeben, das wir noch behandeln werden (s. auch Aufgabe 11.13). ■

Wir betrachten nun lineare Abbildungen auf $\mathbb{R}^n$, die mit dem Skalarprodukt in folgendem Sinne verträglich sind.

Definition

Eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ heißt **orthogonal**, wenn für alle $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in R^n$ gilt:

$$\langle f(\boldsymbol{v}), f(\boldsymbol{w}) \rangle = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle \,.$$

Orthogonale Abbildungen $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ haben einige sehr interessante Eigenschaften:

- $|f(\boldsymbol{v})| = |\boldsymbol{v}|$ für alle $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$, d. h., orthogonale Abbildungen erhalten die Längen von Vektoren.
- Sind $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n$ zwei orthogonale Vektoren, so sind auch $f(\boldsymbol{v})$ und $f(\boldsymbol{w})$ orthogonal.

Beispiel

Die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$f\left(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} v_1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot v_2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot v_3 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot v_2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot v_3 \end{pmatrix}$$

ist orthogonal. ◄

Orthogonale Abbildungen werden wir im Zusammenhang mit orthogonalen Matrizen (Abschn. 13.4) noch intensiv studieren.

Teil III

Das Gram-Schmidt-Verfahren konstruiert Orthonormalbasen

Mit dem Begriff der Basis haben wir ein gutes Mittel kennengelernt, um Untervektorräume $V \subset \mathbb{R}^n$ zu beschreiben. Doch auch Basen sind nicht alle gleich gut geeignet.

Beispiel

Eine Basis der $\mathbb{R}^3$ ist die Standardbasis

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Eine weitere Basis des $\mathbb{R}^3$ ist

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Für viele Anwendungen ist die erste Basis besser geeignet als die zweite. Ein entscheidender Unterschied fällt sofort ins Auge, wenn wir die Basen grafisch darstellen.

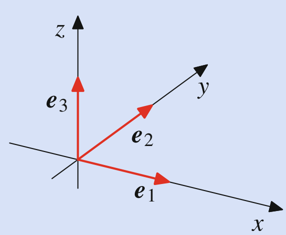

Abb. 11.5 Die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$

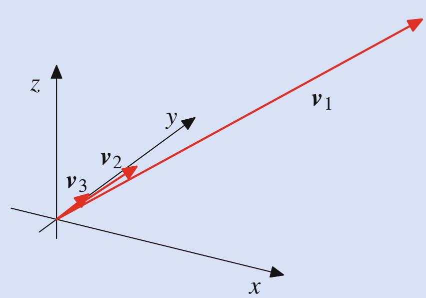

Abb. 11.6 Die Basis $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_1$ des $\mathbb{R}^3$

Wir sehen also, dass die Vektoren in Abb. 11.5 jeweils senkrecht aufeinander stehen und alle die Länge 1 haben, während die Vektoren in Abb. 11.6 relativ eng beieinander liegen, von stark unterschiedlicher Länge sind und alle in einen Sektor des Raumes zeigen. Solche Basen sind vor allem für numerische Berechnungen und Näherungen sehr schlecht geeignet, da sie dazu tendieren, Messfehler zu verstärken. Betrachten wir etwa den Vektor $\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} 26 \\ 22 \\ 23 \end{pmatrix}$, so hat dieser die Koeffizientendarstellungen

$$\begin{aligned} \boldsymbol{w}_1 &= 26 \cdot \mathbf{e}_1 + 22 \cdot \mathbf{e}_2 + 23 \cdot \mathbf{e}_3 \\ &= 4 \cdot \boldsymbol{v}_1 + 2 \cdot \boldsymbol{v}_2 + 10 \cdot \boldsymbol{v}_3, \end{aligned}$$

wohingegen der Vektor $\boldsymbol{w}_2 = \begin{pmatrix} 25 \\ 22 \\ 23.5 \end{pmatrix}$, der nahe bei $\boldsymbol{w}_1$ liegt, die Darstellungen

$$\begin{aligned} \boldsymbol{w}_2 &= 25 \cdot \mathbf{e}_1 + 22 \cdot \mathbf{e}_2 + 23.5 \cdot \mathbf{e}_3 \\ &= 3 \cdot \boldsymbol{v}_1 + 4 \cdot \boldsymbol{v}_2 + 15 \cdot \boldsymbol{v}_3 \end{aligned}$$

besitzt. Die Koeffizienten in der zweiten Darstellung weichen also relativ deutlich von den Koeffizienten der Darstellung von $\boldsymbol{w}_1$ ab. ◀

Definition

Eine Basis $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ eines Untervektorraumes $U \subset \mathbb{R}^n$ heißt **Orthonormalbasis** von U, wenn gilt:

1. $|\boldsymbol{v}_i| = 1$ für $i = 1, \ldots, m$, d. h., alle Vektoren der Basis sind normiert.
2. $\langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j \rangle = 0$ für $i \neq j$, d. h., die Vektoren stehen paarweise senkrecht aufeinander.

Die Standardbasis $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ des $\mathbb{R}^3$ ist eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$, die Basis $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ aus dem vorangegangenen Beispiel ist keine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$.

Beispiel

Die Standardbasis $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ des $\mathbb{R}^n$ ist eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$. ◀

Beispiel

Die in Abb. 11.7 gezeigten Vektoren

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

bilden eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$.

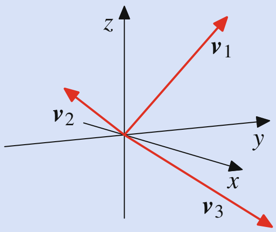

Abb. 11.7 Eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$

Ganz offensichtlich sind Orthonormalbasen aus numerischer Sicht anderen Basen vorzuziehen. Damit stellt sich die Frage, wann solche existieren und wie wir sie finden können. Antwort darauf liefern uns das Orthonormalisierungsverfahren von Gram-Schmidt und der folgende Satz.

Gram-Schmidt-Orthonormalisierung

Jeder Untervektorraum $U \subset \mathbb{R}^n$ des $\mathbb{R}^n$ besitzt eine Orthonormalbasis.

Beweis Der Nachweis ist konstruktiv und liefert einen Algorithmus, mit dem wir aus einer beliebigen Basis von U eine Orthonormalbasis von U machen können.

Dazu gehen wir von einer beliebige Basis $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_m$ von U aus. Wir wandeln diese Basis in zwei Schritten in eine Orthonormalbasis um. Zunächst bilden wir die Vektoren

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}_1 &= \boldsymbol{u}_1\\
\boldsymbol{v}_2 &= \boldsymbol{u}_2 - \frac{\langle \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_1\rangle}{\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1\rangle}\cdot \boldsymbol{v}_1\\
\boldsymbol{v}_3 &= \boldsymbol{u}_3 - \frac{\langle \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{v}_1\rangle}{\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1\rangle}\cdot \boldsymbol{v}_1 - \frac{\langle \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{v}_2\rangle}{\langle \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_2\rangle}\cdot \boldsymbol{v}_2\\
&\vdots\\
\boldsymbol{v}_m &= \boldsymbol{u}_m - \frac{\langle \boldsymbol{u}_m, \boldsymbol{v}_1\rangle}{\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1\rangle}\cdot \boldsymbol{v}_1 - \dots - \frac{\langle \boldsymbol{u}_m, \boldsymbol{v}_{m-1}\rangle}{\langle \boldsymbol{v}_{m-1}, \boldsymbol{v}_{m-1}\rangle}\cdot \boldsymbol{v}_{m-1}\,.
\end{aligned}$$

Wir übernehmen also $\boldsymbol{u}_1$ unverändert als $\boldsymbol{v}_1$, wir ziehen von $\boldsymbol{u}_2$ seinen Anteil „in Richtung $\boldsymbol{v}_1$“ ab usw. Dann gilt:

$\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m$ bilden eine Basis von U, bestehend aus Vektoren, die paarweise senkrecht aufeinander stehen.

Der Nachweis, dass $\langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j\rangle = 0$ für $i \neq j$, ist eine einfache, aber relativ langwierige Rechnung, auf die wir hier verzichten. Um zu zeigen, dass $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m$ den Unterraum U erzeugen, reicht es zu zeigen, dass sich die ursprünglichen Basisvektoren $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_m$ damit darstellen lassen. Das ist aber klar, da sich ja jede der definierenden Gleichungen für ein $\boldsymbol{v}_i$ direkt nach $\boldsymbol{u}_i$ auflösen lässt. Die lineare Unabhängigkeit der Vektoren folgt etwa aus ihrer paarweisen Orthogonalität (Aufgabe 11.10). Es ist aber auch nicht schwer, sie direkt nachzurechnen.

Wir haben also eine Basis von U gefunden, die aus Vektoren besteht, die paarweise orthogonal sind. Um eine Orthonormalbasis zu finden, reicht es, diese Basis zu normieren:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{w}_1 &= \frac{\boldsymbol{v}_1}{|\boldsymbol{v}_1|}\\
\boldsymbol{w}_2 &= \frac{\boldsymbol{v}_2}{|\boldsymbol{v}_2|}\\
&\vdots\\
\boldsymbol{w}_m &= \frac{\boldsymbol{v}_m}{|\boldsymbol{v}_m|}\,.
\end{aligned}$$

Es ist dann klar, dass die Vektoren $\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_m$ normiert sind. Durch die Normierung ändert sich auch nichts daran, dass sie paarweise senkrecht aufeinander stehen, denn

$$\langle \boldsymbol{w}_i, \boldsymbol{w}_j\rangle = \left\langle \frac{\boldsymbol{v}_i}{|\boldsymbol{v}_i|}, \frac{\boldsymbol{v}_j}{|\boldsymbol{v}_j|}\right\rangle = \frac{1}{|\boldsymbol{v}_i|\cdot|\boldsymbol{v}_j|}\cdot\langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j\rangle = 0$$

für $i \neq j$. Offensichtlich bleiben die Vektoren $\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_m$ auch eine Basis von U. ■

Beispiel

Wir betrachten den Untervektorraum $U \subset \mathbb{R}^3$, der von den Vektoren

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$$

erzeugt wird. Diese beiden Vektoren bilden eine Basis von U, denn keiner ist ein Vielfaches des anderen.

1. **Orthogonalisierung:**

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}_1 &= \boldsymbol{u}_1 && = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\\
\boldsymbol{v}_2 &= \boldsymbol{u}_2 - \frac{\langle \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_1\rangle}{\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1\rangle}\cdot \boldsymbol{v}_1 && = \frac{1}{7}\cdot\begin{pmatrix}4\\1\\-2\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

2. **Normalisierung:**

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{w}_1 &= \frac{\boldsymbol{v}_1}{|\boldsymbol{v}_1|} = \frac{1}{\sqrt{14}}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\\
\boldsymbol{w}_2 &= \frac{\boldsymbol{v}_2}{|\boldsymbol{v}_2|} = \frac{1}{\sqrt{21}}\cdot\begin{pmatrix}4\\1\\-2\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Somit haben wir eine Orthonormalbasis gefunden. ◀

Teil III

Das Gram-Schmidt-Verfahren hilft uns auch, das orthogonale Komplement eines Untervektorraumes $U \subset \mathbb{R}^n$ zu bestimmen. Dazu benutzen wir das folgende Verfahren.

Orthogonale Basen von Teilräumen

Sind $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_t \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängig, ist U_τ für $\tau \leq t$ der Untervektorraum, der von $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_\tau$ erzeugt wird, und sind $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_t$ die aus $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_t$ mithilfe des Verfahrens von Gram-Schmidt konstruierten orthonormalen Vektoren, so bilden $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_\tau$ für jedes $\tau \leq t$ eine Orthonormalbasis von U_τ.

Das ist sofort klar, denn $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_\tau$ ist die Orthonormalbasis, die wir nach dem Gram-Schmidt-Verfahren aus der Basis $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_\tau$ von U_τ erhalten.

Ist nun $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$ und ist $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_t$ eine (beliebige) Basis von U, so ergänzen wir $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_t$ zu einer Basis $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_t, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ von $\mathbb{R}^n$. Ist $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ die Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$, die wir hieraus nach dem Gram-Schmidt-Verfahren erhalten, so ist $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_t$ nach obiger Regel eine Orthonormalbasis von U und eine einfache Überlegung zeigt:

Basis des orthognalen Komplements

Die Vektoren $\boldsymbol{u}_{t+1}, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ bilden eine Orthonormalbasis von $U^\perp$.

Ist daher $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ ein beliebiger Vektor, so können wir

$$\boldsymbol{v} = r_1 \cdot \boldsymbol{u}_1 + \cdots + r_n \cdot \boldsymbol{u}_n$$

schreiben. Setzen wir

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} &= r_1 \cdot \boldsymbol{u}_1 + \cdots + r_t \cdot \boldsymbol{u}_t \\ \boldsymbol{u}^\perp &= r_{t+1} \cdot \boldsymbol{u}_{t+1} + \cdots + r_n \cdot \boldsymbol{u}_n \,, \end{aligned}$$

so erhalten wir eine eindeutige Darstellung

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}^\perp \tag{11.1}$$

mit $\boldsymbol{u} \in U$ und $\boldsymbol{u}^\perp \in U^\perp$.

11.3 Allgemeine reelle oder komplexe Vektorräume

Im vorangegangenen Abschnitt haben wir uns mit dem $\mathbb{R}^n$ beschäftigt, weil wir gesehen haben, dass hier viele der Eigenschaften erfüllt sind, die das Arbeiten mit ebenen oder räumlichen Vektoren so interessant und ergebnisreich machen. Diese Eigenschaften sind aber nicht auf den $\mathbb{R}^n$ beschränkt. Wie wir schon gesehen haben, haben Untervektorräume von $\mathbb{R}^n$ dieselben strukturellen Eigenschaften, obwohl sie im Allgemeinen nicht gleich dem $\mathbb{R}^n$ sind. Daher liegt es nahe, diese strukturellen Eigenschaften zu abstrahieren.

Allgemeine Mengen können reelle Vektorräume sein

Ein (reeller) **Vektorraum** ist eine nichtleere Menge V zusammen mit einer Addition

$$' + ' : V \times V \longrightarrow V, \quad (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \longmapsto \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$$

und einer Skalarmultiplikation

$$' \cdot ' : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V, \quad (r, \boldsymbol{v}) \longmapsto r \cdot \boldsymbol{v} \,,$$

also einer Operation $+$, die zwei Vektoren $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{w}$ einen Vektor $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$ zuordnet, und einer Operation $\cdot$, die einem Vektor $\boldsymbol{v}$ und einer reellen Zahl r einen Vektor $r \cdot \boldsymbol{v}$ zuweist, sodass hierfür die acht Vektorraumaxiome (1–8), die wir in Abschn. 11.1 für den $\mathbb{R}^n$ aufgestellt haben, gelten.

Beispiel

1. $\mathbb{R}^n$ zusammen mit den Operationen aus Abschn. 11.1 ist ein Vektoraum.
2. Jeder Untervektorraum $U \subset \mathbb{R}^n$ ist ein Vektorraum. ◀

Beispiel

Wir betrachten ein Intervall $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ und bezeichnen mit V die Menge aller Abbildungen

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} \,.$$

Für zwei Abbildungen $f, g \in V$ definieren wir deren Summe $f + g$ durch

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{für alle } x \in [a, b] \,,$$

und für eine Abbildung $f \in V$ und ein $r \in \mathbb{R}$ erklären wir $r \cdot f$ durch

$$(r \cdot f)(x) = r \cdot f(x) \quad \text{für alle } x \in [a, b] \,.$$

Addition und Skalarmultiplikation für Funktionen sind also punktweise erklärt.

Dann ist $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum.

Für diesen Vektorraum schreibt man auch $\mathrm{Abb}([a, b], \mathbb{R})$ oder $[a, b]^{\mathbb{R}}$ und nennt ihn den **Vektorraum der (reellwertigen) Abbildungen auf dem Intervall $[a, b]$**. ◀

Beispiel

Wir betrachten wieder ein Intervall $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$. Eine Abbildung $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ auf $[a, b]$ heißt **Polynom** oder

Anwendung: Berechnung von Orthonormalbasen in MATLAB

Das Gram-Schmidt-Verfahren ist in MATLAB nicht als vorgefertigte Funktion vorhanden. Wir können es jedoch in wenigen Zeilen als eigenen Funktionsbaustein implementieren. Um diesen elegant und generisch zu machen, wollen wir hierzu etwas vorgreifen und Matrizen und die Matrizenschreibweise aus Kap. 12 benutzen (vgl. dazu auch das Beispiel zur Anwendung von MATLAB in der Matrizenrechnung). Dabei gehen wir so vor, dass wir die m Vektoren in $\mathbb{R}^n$, die eine Basis von U bilden und die wir orthonormalisieren wollen, als Spalten einer $n \times m$-Matrix schreiben, also als $n \times m$-Schema von Zahlen, bestehend aus n Zeilen und m Spalten. Gehen wir etwa von den Vektoren

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

aus, so schreiben wir diese als 4×3-Matrix, also als Rechteckschema

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

und übergeben dieses an einen Funktionsbaustein, dessen Coding wie folgt aussehen könnte:

```
function [V] = gramschmidt(U)
%input:     m linearly independent
    vectors
%output:    Gram-Schmidt
    orthonormalization
[n,m] = size(U);      % m n-dimensional
    vectors
V=zeros(n,m);          % initialize output
for i=1:m              % orthonormalize
    u=U(:,i);
    for j=1:i-1
        u=u-dot(U(:,i),V(:,j))*V(:,j);
    end
    V(:,i)=u/norm(u);
end
```

Beachten Sie, dass bei dieser Implementierung die Normierung der $\boldsymbol{v}_i$ auf die Länge 1 sofort vorgenommen wird, nachdem von $\boldsymbol{u}_i$ die Anteile in Richtung der $\boldsymbol{v}_j$ ($j = 1, \ldots, i-1$) abgezogen worden sind. Deshalb entfällt im Orthogonalisierungsschritt die Division durch $\langle \boldsymbol{v}_j, \boldsymbol{v}_j \rangle$, da dadurch bereits sichergestellt ist, dass $\langle \boldsymbol{v}_j, \boldsymbol{v}_j \rangle = 1$.

Im konkreten Beispiel hat der Aufruf dann diese Gestalt:

```
U=[1,1,1;1,2,3;1,0,1;0,1,1];
V = gramschmidt(U)
V =
    0.5774   -0.0000   -0.8165
    0.5774    0.5774    0.4082
    0.5774   -0.5774    0.4082
         0    0.5774    0.0000
```

Das zurückgegebene Schema enthält nun als Spalten die durch das Gram-Schmidt-Verfahren aus $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ und $\boldsymbol{u}_3$ entstandene Orthonormalbasis $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ und $\boldsymbol{v}_3$, hier also

$$\boldsymbol{v}_1 = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ \sqrt{3} \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} -2\sqrt{6} \\ \sqrt{6} \\ \sqrt{6} \\ 0 \end{pmatrix}$$

polynomiale Abbildung, wenn sich f in der Form

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

für ein geeignetes n und mit geeigneten $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ schreiben lässt. Beispiele hierfür sind $f(x) = x^2 + 2$ oder $f(x) = 6x^3 - 3x + 4$.

Mit U bezeichnen wir die Menge der polynomialen Abbildungen

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Wie im obigen Beispiel definieren wir für zwei Polynome $f, g \in U$ die Abbildung $f + g$ durch

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \qquad \text{für alle } x \in [a, b],$$

und für ein Polynom $f \in U$ und ein $r \in \mathbb{R}$ erklären wir $r \cdot f$ durch

$$(r \cdot f)(x) = r \cdot f(x) \qquad \text{für alle } x \in [a, b].$$

Dann ist offensichtlich, dass sowohl $f + g$ als auch $r \cdot f$ wieder polynomiale Abbildungen sind. So ist etwa

$$(x^2 + 2) + (6x^3 - 3x + 4) = 6x^3 + x^2 - 2x + 6$$

oder

$$3 \cdot (6x^3 - 3x + 4) = 18x^3 - 9x + 12.$$

Auch hier rechnen wir sofort nach, dass $(U, +, \cdot)$ ein Vektorraum ist.

Teil III

11.3 Mathematischer Hintergrund: Symmetrische bilineare Abbildungen

Wir haben nun sehr viel mit dem Skalarprodukt gearbeitet. Das Skalarprodukt ist keine Abbildung auf dem Vektorraum, den wir betrachten, sondern eine Zuordnung, die einem Paar von Vektoren eine reelle Zahl (einen Skalar) zuweist. Auch wenn das Skalarprodukt eine ausgezeichnete Rolle einnimmt, so gibt es doch viele Konstruktionen mit ähnlichen Eigenschaften.

Eine Zuordnung

$$\beta : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

heißt **bilinear** oder **bilineare Paarung**, wenn sie die folgenden Eigenschaften erfüllt:

1. $\beta(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}) = \beta(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{w}) + \beta(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w})$ für $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n$
2. $\beta(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2) = \beta(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_1) + \beta(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_2)$ für $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2 \in \mathbb{R}^n$
3. $\beta(r \cdot \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \beta(\boldsymbol{v}, r \cdot \boldsymbol{w}) = r \cdot \beta(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ für $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n$, $r \in \mathbb{R}$

Die Bedingungen besagen, dass β eine Paarung ist, die linear wird, wenn wir entweder die erste oder die zweite Komponente festhalten.

Die Paarung $\gamma : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\gamma\left(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}\right) = v_1 \cdot w_2$$

ist eine Bilinearform.

Das Skalarprodukt ist eine Bilinearform, und es hat im Vergleich zur Bilinearform γ noch einige weitere interessante Eigenschaften.

Eine Bilinearform $\beta : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt **symmetrisch**, wenn

$$\beta(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \beta(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}) \qquad \text{für alle } \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n .$$

Das Skalarprodukt ist symmetrisch, die Paarung γ dagegen ist nicht symmetrisch, denn

$$\gamma(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 1 \neq 0 = \gamma(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) .$$

Betrachten wir die Paarung $\delta : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\delta\left(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}\right) = v_1 \cdot w_1 ,$$

so handelt es sich hierbei um eine Bilinearform, von der wir leicht nachrechnen, dass sie symmetrisch ist. Allerdings hat auch diese Bilinearform noch nicht alle Eigenschaften, die das Skalarprodukt so interessant machen. Hierfür gilt etwa

$$\delta(\mathbf{e}_2, \boldsymbol{w}) = 0 \qquad \text{für jedes } \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^2 ,$$

wohingegen beispielsweise $\langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 \rangle \neq 0$.

Eine symmetrische Bilinearform $\beta : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt **nicht ausgeartet**, wenn es zu jedem $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ ein $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n$ gibt mit

$$\beta(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \neq 0 ,$$

was wegen der Symmetrie äquivalent dazu ist, dass es zu jedem $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ ein $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ gibt mit

$$\beta(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \neq 0 .$$

Betrachten wir die Paarung $\varepsilon : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\varepsilon\left(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}\right) = v_1 \cdot w_1 - v_2 \cdot w_2 ,$$

so handelt es sich hierbei um eine symmetrische Bilinearform, die nicht ausgeartet ist. Ist nämlich $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ ein beliebiger, vom Nullvektor verschiedener Vektor, so gilt

$$\varepsilon(\boldsymbol{v}, \mathbf{e}_1) = v_1, \quad \varepsilon(\boldsymbol{v}, \mathbf{e}_2) = -v_2 ,$$

und einer dieser beiden Werte ist von 0 verschieden. Allerdings hat auch diese nicht ausgeartete Paarung noch nicht alle Eigenschaften eines Skalarprodukts. So gilt

$$\varepsilon(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) = -1 ,$$

wohingegen beim Skalarprodukt immer

$$\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle = |\boldsymbol{v}|^2 \geq 0 .$$

Eine symmetrische Bilinearform $\beta : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt **positiv semidefinit**, wenn

$$\beta(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) \geq 0 \qquad \text{für jedes } \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n ,$$

und **positiv definit**, wenn

$$\beta(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) > 0 \qquad \text{für jedes } \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\} .$$

Entsprechend heißt β **negativ semidefinit** bzw. **negativ definit**, wenn

$$\beta(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) \leq 0 \text{ bzw. } \beta(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) < 0 \text{ für jedes } \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\} .$$

Gibt es dagegen $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n$ mit $\beta(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) > 0$, $\beta(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}) < 0$, so nennen wir β **indefinit**. Das Skalarprodukt ist positiv definit, die Bilinearform ε ist degegen indefinit, denn

$$\varepsilon(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) > 0, \quad \varepsilon(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) < 0 .$$

Teil III

11.4 Mathematischer Hintergrund: Das komplexe Skalarprodukt

Betrachten wir den komplexen Vektorraum $\mathbb{C}^n$, so kann man zwar auch hier eine zum Reellen analoge Konstruktion für das Skalarprodukt durchführen, es also durch

$$\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle = \sum_{k=1}^{n} v_k \cdot w_k$$

definieren, allerdings führt das zu unerwarteten Nebeneffekten. Betrachten wir etwa den komplexen Vektor $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2\mathrm{i} \end{pmatrix}$, so erhalten wir das Ergebnis

$$\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle = 1 \cdot 1 + (2\mathrm{i}) \cdot (2\mathrm{i}) = 1 + (-4) = -3$$

und damit sicherlich nicht das Quadrat der Länge des Vektors $\boldsymbol{v}$ (wie es das Skalarprodukt eines Vektors mit sich selbst im $\mathbb{R}^n$ liefert). Daher ist hier ein anderer Ansatz angebracht, und wir definieren für zwei Vektoren $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{C}^n$ deren Skalarprodukt durch

$$\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle = \sum_{k=1}^{n} v_k \cdot \overline{w_k}\,,$$

wobei $\overline{z}$ die komplex-konjugierte Zahl zu einer komplexen Zahl z bezeichnet. Dann gilt etwa

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2\mathrm{i} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2\mathrm{i} \end{pmatrix} \right\rangle = 1 \cdot \overline{1} + 2\mathrm{i} \cdot \overline{2\mathrm{i}} = 1 + 4 = 5 > 0$$

oder für einen beliebigen Vektor

$$\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle = \sum_{k=1}^{n} v_k \cdot \overline{v_k} = \sum_{k=1}^{n} |v_k|^2 \geq 0\,,$$

wobei genau dann $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle = 0$ ist, wenn $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$.

Diese Konstruktion hat die folgenden Eigenschaften:

1. $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle = \overline{\langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v} \rangle}$ für alle $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{C}^n$
2. $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 \rangle = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_1 \rangle + \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_2 \rangle$ und
   $\langle \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w} \rangle = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{w} \rangle + \langle \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w} \rangle$
   für alle $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2 \in \mathbb{C}^n$
3. $\langle a \cdot \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle = a \cdot \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle$ und $\langle \boldsymbol{v}, a \cdot \boldsymbol{w} \rangle = \overline{a} \cdot \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle$
   für alle $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{C}^n$ und alle $a \in \mathbb{C}$

Diese Eigenschaften sind ähnlich zu denen des Skalarprodukts im $\mathbb{R}^n$, wenn wir davon absehen, dass in der zweiten Komponente komplexe Konjugation zu betrachten ist. Im Gegensatz zur Situation im $\mathbb{R}^n$ ist diese Paarung $\langle\ ,\ \rangle$ also nicht mehr bilinear, sondern in der zweiten Komponente nur noch linear „bis auch komplexe Konjugation". Eine Paarung mit dieser Eigenschaft wird als **Sesquilinearform** bezeichnet. Ferner ist diese Paarung auch nicht mehr symmetrisch, sondern erfüllt die Bedingung

$$\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle = \overline{\langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v} \rangle}\,.$$

Sequilinearformen mit dieser Eigenschaft werden **hermitesche Formen** genannt.

Diese Konstruktion wird motiviert vom Betrag komplexer Zahlen, bei dem wir ja auch

$$|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}} \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C}$$

gesetzt haben. Entsprechend definieren wir für komplexe Vektoren

$$|\boldsymbol{v}| = \sqrt{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle}$$

und nennen $|\boldsymbol{v}|$ die **Länge von $\boldsymbol{v}$**. Wie im Reellen heißen zwei Vektoren $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{C}^n$ **orthogonal**, wenn

$$\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle = 0\,.$$

Die Eigenschaften, die wir für Beträge in reellen Vektorräumen gefunden haben, verallgemeinern sich unmittelbar auf diese Situation. Speziell gelten:

1. $|a \cdot \boldsymbol{v}| = |a| \cdot |\boldsymbol{v}|$ für $\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n$ und $a \in \mathbb{C}$
2. $|\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}| \leq |\boldsymbol{v}| + |\boldsymbol{w}|$ für $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{C}^n$

Auch das Konzept der Orthonormalbasen kann ins Komplexe übertragen werden: Eine Basis $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m$ eines komplexen Untervektorraumes $U \subset \mathbb{C}^n$ heißt Orthonormalbasis von U, wenn

1. $\langle \boldsymbol{u}_l, \boldsymbol{u}_k \rangle = 0$ für $l \neq k$,
2. $|\boldsymbol{u}_l| = 1$ für $l = 1, \ldots, m$.

Das Verfahren von Gram-Schmidt zur Konstruktion einer Orthonormalbasis funktioniert hier ebenso.

Der komplexe Vektorraum $\mathbb{C}^n$ zusammen mit diesem Skalarprodukt heißt **unitärer Vektorraum**.

Eine komplex-lineare Abbildung $f : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ heißt **unitär**, wenn

$$\langle f(\boldsymbol{v}), f(\boldsymbol{w}) \rangle = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle \qquad \text{für alle } \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in C^n\,.$$

Die Abbildung $f : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ mit

$$f\left(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} (1-\mathrm{i}) \cdot v_1 + (1+\mathrm{i}) \cdot v_2 \\ (1+\mathrm{i}) \cdot v_1 + (1-\mathrm{i}) \cdot v_2 \end{pmatrix}$$

etwa ist unitär. Wie orthogonale Abbildungen im Reellen erhalten unitäre Abbildungen Länge und Orthogonalität von Vektoren.

Für diesen Vektorraum schreiben wir $\mathrm{Pol}([a, b], \mathbb{R})$ und nennen ihn den **Vektorraum der (reellwertigen) polynomialen Abbildungen auf dem Intervall $[a, b]$**. ◀

Der Vektorraum U der Polynome auf $[a, b]$ ist eine Teilmenge des Vektorraumes V aller reellwertigen Abbildungen auf $[a, b]$, und die Vektorraumoperationen auf U sind genau so definiert wie die auf V. Solche Paare sind besonders interessant für uns.

Definition

Ist $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum und ist $U \subset V$ eine Teilmenge, so heißt U **Untervektorraum** von V wenn gilt:

1. $U \neq \emptyset$.
2. Sind $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in U$, so ist auch $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} \in U$.
3. Sind $\boldsymbol{v} \in U$, $r \in \mathbb{R}$, so ist $r \cdot \boldsymbol{v} \in U$.

Alle Beispiele von Untervektorräumen des $\mathbb{R}^n$, die wir in Abschn. 11.1 kennengelernt haben, sind auch Untervektorräume des $\mathbb{R}^n$ im Sinne dieser Definition.

Beispiel

Der Vektorraum $\mathrm{Pol}([a, b], \mathbb{R})$ ist ein Untervektorraum von $\mathrm{Abb}([a, b], \mathbb{R})$. ◀

Jeder Vektorraum hat eine Basis

Wir betrachten nun einen Vektorraum V und endlich viele Vektoren $\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \in V$.

Definition

Der Vektor $\boldsymbol{w}$ heißt **Linearkombination** von $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$, wenn es $r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$\boldsymbol{w} = r_1 \cdot \boldsymbol{v}_1 + \cdots + r_n \cdot \boldsymbol{v}_n .$$

Beispiel

Sind $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 1\\1\\1\\1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1\\2\\3\\4 \end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 8\\6\\4\\2 \end{pmatrix}$ (in $\mathbb{R}^4$), so ist $\boldsymbol{w}$ eine Linearkombination von $\boldsymbol{v}_1$ und $\boldsymbol{v}_2$, denn es gilt

$$\boldsymbol{w} = \frac{1}{5} \cdot \boldsymbol{v}_1 + \frac{1}{10} \cdot \boldsymbol{v}_2 .$$ ◀

Beispiel

Sind $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 1\\1\\2\\2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1\\2\\3\\4 \end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 8\\6\\4\\2 \end{pmatrix}$ (in $\mathbb{R}^4$), so ist $\boldsymbol{w}$ keine Linearkombination von $\boldsymbol{v}_1$ und $\boldsymbol{v}_2$. Das ist so unmittelbar nicht sofort einzusehen. Wir können dieses Beispiel später im Zusammenhang mit linearen Gleichungssystemen (Kap. 12) einfach behandeln. Es ist aber eine gute Übung zu zeigen, dass es keine reellen Zahlen r, s gibt mit

$$\boldsymbol{w} = r \cdot \boldsymbol{v}_1 + s \cdot \boldsymbol{v}_2 .$$ ◀

Beispiel

Ist $V = \mathrm{Pol}([a, b], \mathbb{R})$ der Vektorraum der Polynome auf $[a, b]$ und sind $f(x) = 2x^2 - 4$, $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2$ und $f_3(x) = x^3$, so ist f eine Linearkombination von f_0, f_1, f_2, f_3, denn es gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= -4 \cdot f_0(x) + 2 \cdot f_2(x) \\ &= -4 \cdot f_0(x) + 0 \cdot f_1(x) + 2 \cdot f_2(x) + 0 \cdot f_3(x) . \end{aligned}$$ ◀

Das Konzept der Linearkombination lässt sich auf unendliche Familien von Vektoren ausdehnen. Dazu betrachten wir eine Indexmenge Λ, etwa $\Lambda = \{1, \ldots, n\}$ oder $\Lambda = \mathbb{N}_0$ und Vektoren $\{\boldsymbol{v}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ in V, die mit dieser Indexmenge durchnummeriert sind (d. h., für jedes $\lambda \in \Lambda$ ist ein Element $\boldsymbol{v}_\lambda \in V$ gegeben). Für $\Lambda = \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$ ist es eine Menge $\{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots\}$ von unendlich vielen durchnummerierten Elementen aus V.

Definition

Ein Vektor $\boldsymbol{w}$ heißt **Linearkombination** von $\{\boldsymbol{v}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, wenn es *endlich viele* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \Lambda$ und $r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$\boldsymbol{w} = r_1 \cdot \boldsymbol{v}_{\lambda_1} + \cdots + r_n \cdot \boldsymbol{v}_{\lambda_n} .$$

Kommentar Ist Λ endlich, $\Lambda = \{1, \ldots, n\}$, so können stets alle $\lambda \in \Lambda$ betrachtet werden. Daher stimmt in diesem Fall die Definition mit oben gegebener überein. ◀

Beispiel

Wir betrachten den Vektorraum $V = \mathrm{Pol}([a, b], \mathbb{R})$, die Indexmenge $\Lambda = \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$ und definieren f_n durch

$$f_n(x) = x^n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0 \qquad (11.2)$$

(also $f_0(x) = 1, f_1(x) = x, f_2(x) = x^2, \ldots$). Ist $f \in V$ das Polynom mit $f(x) = 3x^5 - 2x^2 + 7$, so ist f eine Linearkombination der $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

Dazu betrachten wir die endliche Teilmenge von $\mathbb{N}_0$ mit den Elementen $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$ und $\lambda_3 = 5$. Dann gilt hierfür

$$f(x) = 7 \cdot f_{\lambda_1}(x) + (-2) \cdot f_{\lambda_2}(x) + 3 \cdot f_{\lambda_3}(x)\,.$$

Allgemein ist jedes Polynom $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Linearkombination der $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$. Schreibt sich $f(x)$ als

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0,$$

so betrachten wir die Teilmenge $\{0, 1, \ldots, n\} \subseteq \mathbb{N}_0$ und erhalten mit

$$f(x) = a_n \cdot f_n(x) + \cdots + a_1 \cdot f_1(x) + a_0 \cdot f_0(x)$$

eine Darstellung wie gewünscht.

Die Sinusfunktion $g(x) = \sin(x)$, eingeschränkt auf das Intervall $[a, b]$, hat eine Beschreibung durch die sog. Sinusreihe

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \ldots,$$

also eine Summendarstellung mit den f_n. Das ist aber keine Beschreibung der Sinusfunktion als Linearkombination der f_n, da unendlich viele der f_n benötigt werden.

Die Sinusfunktion lässt sich auch nicht auf andere Weise als Linearkombination der f_n schreiben. Eine Linearkombination f der f_n ist nämlich ein Polynom. Ist d der Grad dieses Polynoms, so hat f höchstens d, also eine endliche Anzahl von Nullstellen (wenn es nicht das Nullpolynom ist). Die Sinusfunktion ist jedoch nicht die Nullfunktion, hat aber unendlich viele Nullstellen und kann daher kein Polynom sein. ◀

Definition

Eine Familie $\{\boldsymbol{v}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ von Vektoren in V heißt ein **Erzeugendensystem** von V, wenn sich jedes $\boldsymbol{v} \in V$ als Linearkombination von $\{\boldsymbol{v}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ schreiben lässt.

Beispiel

Ist $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}$, so ist V ein Vektorraum (als Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$), und die Vektoren

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

bilden ein Erzeugendensystem von V. Ebenso ist

$$\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{w}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ein Erzeugendensystem von V. ◀

Beispiel

Ist $V = \mathrm{Pol}([a, b], \mathbb{R})$ und sind $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ die Polynome mit $f_n(x) = x^n$ (für $n \in \mathbb{N}_0, x \in [a, b]$), so ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Erzeugendensystem von V, wie wir bereits nachgerechnet haben. ◀

Beispiel

Ist $V = \mathrm{Abb}([a, b], \mathbb{R})$ der Vektorraum aller reellwertigen Abbildungen auf dem Intervall $[a, b]$ und sind $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ die Polynome mit $f_n(x) = x^n$ (für $n \in \mathbb{N}_0$ und $x \in [a, b]$), so ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ kein Erzeugendensystem von V, da etwa die Sinusfunktion in V liegt, aber keine Linearkombination der $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist, wie wir schon gesehen haben. ◀

Teil III

Mit Erzeugendensystemen können wir Vektorräume und ihre Elemente beschreiben. Allerdings ist diese Beschreibung nicht immer effizient. Hierzu wird ein weiterer Begriff benötigt.

Definition

Eine Familie $\{\boldsymbol{v}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ von Vektoren in V heißt **linear unabhängig**, wenn gilt:

Ist $\Lambda_0 = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} \subset \Lambda$ eine beliebige endliche Teilmenge von Λ und sind $r_1, \ldots, r_n$ reelle Zahlen mit

$$r_1 \cdot \boldsymbol{v}_{\lambda_1} + r_2 \cdot \boldsymbol{v}_{\lambda_2} + \cdots + r_n \cdot \boldsymbol{v}_{\lambda_n} = \mathbf{0}$$

so muss schon

$$r_1 = r_2 = \ldots = r_n = 0$$

gelten. Anderenfalls heißt die Familie $\{\boldsymbol{v}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ linear abhängig.

Ist Λ eine endliche Menge, so reicht es, die Bedingung aus der Definition nur für $\Lambda_0 = \Lambda$ zu prüfen. Wir erhalten dann wieder die Definition, die wir in Abschn. 11.1 für Vektoren im $\mathbb{R}^n$ gemacht haben.

Kommentar Ist $\{\boldsymbol{v}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ eine Familie linear unabhängiger Vektoren und ist $\Gamma \subset \Lambda$ eine Teilmenge von Λ, so ist auch $\{\boldsymbol{v}_\lambda\}_{\lambda\in\Gamma}$ linear unabhängig. ◀

Beispiel

1. Die Vektoren $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ sind linear unabhängig.
2. Die Vektoren $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix}4\\3\\3\\4\end{pmatrix}$ sind linear abhängig, denn

$$7 \cdot \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 + (-2) \cdot \boldsymbol{v}_3 = \mathbf{0}.$$

◀

Alle Beispiele linear unabhängiger Vektoren aus Abschn. 11.1 sind auch linear unabhängig im Sinne der neuen Definition, und alle Beispiele linear abhängiger Vektoren sind auch linear abhängig im Sinne der neuen Definition.

Beispiel

1. Ist $U = \text{Pol}([a, b], \mathbb{R})$ der Vektorraum der polynomialen Funktionen auf $[a, b]$ und sind $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ die Polynome mit $f_n(x) = x^n$ (für $n \in \mathbb{N}_0, x \in [a, b]$), so ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Familie linear unabhängiger Vektoren.
   Wir betrachten dazu eine endliche Teilmenge $\{i_1, \ldots, i_n\} \subset \mathbb{N}_0$ und Elemente $r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{R}$ mit
   $$0 = r_1 \cdot f_{i_1}(x) + \cdots + r_n \cdot f_{i_n}(x) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$
   Wir können dabei annehmen, dass $i_1 < i_2 < \cdots < i_n$. Die rechte Seite definiert $p(x) = r_1 \cdot x^{i_1} + \cdots + r_n \cdot x^{i_n}$, ein Polynom, das, falls es nicht das Nullpoylnom ist, nur endlich viele Nullstellen haben kann (maximal i_n viele). Da es aber für alle $x \in [a, b]$ verschwindet, muss es das Nullpolynom sein, und damit muss
   $$r_1 = r_2 = \cdots = r_n = 0$$
   gelten. Also sind die f_n linear unabhängig.
   Eine anderer, sehr eleganter Nachweis dieser Tatsache wird mithilfe der Differenzialrechnung geführt. Dazu betrachte wieder $p(x) = r_1 \cdot x^{i_1} + \cdots + r_n \cdot x^{i_n}$. Dann gilt für die i_n-te Ableitung $p^{(i_n)}(x) = i_n! \cdot r_n$, sie ist also konstant. Da aber $p(x) = 0$ für alle x, ist auch $p^{(i_n)}(x) = 0$, und damit ist $r_n = 0$. Induktiv folgern wir daraus, dass auch $r_{n-1} = \cdots = r_1 = 0$.
2. Ist wieder $U = \text{Pol}([a, b], \mathbb{R})$ der Vektorraum der Polynome und ist $(g_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ die Familie in U mit
   $$g_0(x) = 2x^2 + 3x^4, \qquad g_n(x) = x^{2n} \quad \text{für } n \geq 1,$$
   so sind die $(g_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ linear abhängig, denn wir erhalten $g_0(x) - 2g_1(x) - 3g_2(x) = 0$ für alle $x \in [a, b]$. Definieren wir stattdessen
   $$g_0(x) = 1 + 2x^2 + 3x^4$$
   so ist die Familie $(g_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ linear unabhängig, wie leicht nachgerechnet werden kann. ◀

Definition

Eine Familie $\{\boldsymbol{v}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ von Vektoren in V heißt **Basis** von V, wenn die Vektoren $\{\boldsymbol{v}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ sowohl linear unabhängig als auch ein Erzeugendensystem von V sind.

Kommentar Ist $V = \mathbb{R}^n$ oder ein Untervektorraum hiervon, so stimmt diese Definition einer Basis mit der aus Abschn. 11.1 überein. Insbesondere sind also alle dort angegebenen Beispiele von Basen (wie etwa die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$) auch Basen im Sinne dieser Definition. ◀

Beispiel

1. Die Vektoren $\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{w}_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{w}_3 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{w}_4 = \begin{pmatrix}2\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{w}_5 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\2\end{pmatrix}$ bilden keine Basis von $\mathbb{R}^4$. Sie erzeugen zwar den $\mathbb{R}^4$, aber sie sind nicht linear unabhängig, da etwa
   $$\boldsymbol{w}_1 - 5 \cdot \boldsymbol{w}_2 + 2 \cdot \boldsymbol{w}_4 - 2 \cdot \boldsymbol{w}_5 = \mathbf{0}.$$
2. Die Vektoren $\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{u}_3 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}$ sind keine Basis von $\mathbb{R}^4$. Sie sind zwar linear unab-

hängig, erzeugen aber $\mathbb{R}^4$ nicht. So ist $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ keine Linearkombination von $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ und $\boldsymbol{u}_3$. ◄

Beispiel

Ist $U = \mathrm{Pol}([a,\, b], \mathbb{R})$ der Vektorraum der Polynome auf $[a,\, b]$ und sind $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ die Polynome mit $f_n(x) = x^n$ (für $n \in \mathbb{N}_0,\ x \in [a,\, b]$), so ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Basis von U, da wir schon nachgerechnet haben, dass diese Familie sowohl erzeugend als auch linear unabhängig ist. ◄

Ein wichtiges allgemeines Ergebnis über Basen liefert die folgende Aussage.

Basen von Vektorräumen

Für eine Familie $\{\boldsymbol{v}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ von Vektoren in V sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1. $\{\boldsymbol{v}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ ist eine Basis von V.
2. $\{\boldsymbol{v}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ ist ein unverkürzbares Erzeugendensystem von V, d. h., $\{\boldsymbol{v}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ erzeugt V, und für jede echte Teilmenge $\Lambda_0 \subset \Lambda$ gilt: $\{\boldsymbol{v}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda_0}$ erzeugt V nicht mehr.
3. $\{\boldsymbol{v}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ ist eine maximal linear unabhängige Familie von Vektoren in V, d. h., nimmt man noch einen Vektor $\boldsymbol{w}$ hinzu, so ist die resultierende Familie niemals mehr linear unabhängig.
4. $\{\boldsymbol{v}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ ist ein Erzeugendensystem von V, mit dem sich jedes Element von V auf genau eine Weise darstellen lässt.

Beweis Diese Aussage ist absolut zentral für die Betrachtung von Vektorräumen. Daher führen wir hier ihren Beweis.

Wir zeigen 1. $\Longrightarrow$ 2. $\Longrightarrow$ 4. $\Longrightarrow$ 3. $\Longrightarrow$ 1. Damit sind alle Äquivalenzen gezeigt.

- **1.** $\Longrightarrow$ **2.** : Angenommen, wir könnten ein $\boldsymbol{v}_{\lambda_0}$ weglassen und erhielten immer noch ein Erzeugendensystem $\{\boldsymbol{v}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda\setminus\{\lambda_0\}}$ von V. Dann könnten wir insbesondere $\boldsymbol{v}_{\lambda_0}$ als Linearkombination dieses Erzeugendensystems schreiben:

$$\boldsymbol{v}_{\lambda_0} = r_1\boldsymbol{v}_{\lambda_1} + r_2\boldsymbol{v}_{\lambda_2} + \cdots + r_n\boldsymbol{v}_{\lambda_n}$$

mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \Lambda \setminus \{\lambda_0\}$. Dann ist aber

$$\boldsymbol{v}_{\lambda_0} - r_1\boldsymbol{v}_{\lambda_1} - r_2\boldsymbol{v}_{\lambda_2} - \cdots - r_n\boldsymbol{v}_{\lambda_n} = \boldsymbol{0}$$

im Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit von $\{\boldsymbol{v}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$.

- **2.** $\Longrightarrow$ **4.** : Angenommen, ein $\boldsymbol{v}$ hat zwei voneinander verschiedene Darstellungen,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} &= r_1\boldsymbol{v}_{\lambda_1} + \ldots + r_n\boldsymbol{v}_{\lambda_n} \\ \boldsymbol{v} &= s_1\boldsymbol{v}_{\mu_1} + \ldots + s_m\boldsymbol{v}_{\mu_m} . \end{aligned}$$

Dann erhalten wir durch das Bilden der Differenz

$$\boldsymbol{0} = \left(r_1\boldsymbol{v}_{\lambda_1} + \ldots + r_n\boldsymbol{v}_{\lambda_n}\right) - \left(s_1\boldsymbol{v}_{\mu_1} + \ldots + s_m\boldsymbol{v}_{\mu_m}\right) ,$$

also (nach eventueller Umbenennung und Umsortierung) eine Linearkombination

$$\boldsymbol{0} = t_1\boldsymbol{v}_{\nu_1} + \ldots + t_l\boldsymbol{v}_{\nu_l} ,$$

in der nach Voraussetzung mindestens einer der Koeffizienten t_i von 0 verschieden ist. Wir können annehmen, dass das t_1 ist. Dann gilt aber

$$\boldsymbol{v}_{\nu_1} = -\frac{1}{t_1} \cdot \left(t_2\boldsymbol{v}_{\nu_2} + \ldots + t_l\boldsymbol{v}_{\nu_l}\right) ,$$

und damit könnte $\boldsymbol{v}_{\nu_1}$ aus dem Erzeugendensystem entfernt werden, und die verbleibenden Vektoren wären immer noch erzeugend, denn immer wenn $\boldsymbol{v}_{\nu_1}$ auftritt, kann es durch diese Linearkombination ersetzt werden. Das aber ist ein Widerspruch zur Unverkürzbarkeit des Erzeugendensystems.

- **4.** $\Longrightarrow$ **3.** : Wenn sich jedes Element in V eindeutig mit $\{\boldsymbol{v}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ darstellen lässt, dann gilt das insbesondere für den Nullvektor:

$$\boldsymbol{0} = r_1 \cdot \boldsymbol{v}_{\lambda_1} + \ldots + r_n \cdot \boldsymbol{v}_{\lambda_n} .$$

Da sich der Nullvektor aber in trivialer Weise darstellen lässt,

$$\boldsymbol{0} = 0 \cdot \boldsymbol{v}_{\lambda_1} + \ldots + 0 \cdot \boldsymbol{v}_{\lambda_n} ,$$

folgt aus der Eindeutigkeit schon, dass $r_1 = \ldots = r_n = 0$. Damit ist die Familie $\{\boldsymbol{v}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ linear unabhängig. Da sie aber schon erzeugt, kann man kein weiteres Element aus V mehr dazunehmen, ohne die lineare Unabhängigkeit zu zerstören. Ist nämlich $\boldsymbol{w}$ ein beliebiger weiterer Vektor, so schreibt sich $\boldsymbol{w}$ als

$$\boldsymbol{w} = r_1 \cdot \boldsymbol{v}_{\lambda_1} + \ldots + r_n \cdot \boldsymbol{v}_{\lambda_n},$$

was zu einer nichttrivialen Linearkombination

$$\boldsymbol{0} = \boldsymbol{w} - r_1 \cdot \boldsymbol{v}_{\lambda_1} - \ldots - r_n \cdot \boldsymbol{v}_{\lambda_n}$$

führt, sodass die Familie $\{\boldsymbol{v}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \cup \{\boldsymbol{w}\}$ nicht mehr linear unabhängig ist.

- **3.** $\Longrightarrow$ **1.** : Es bleibt noch zu zeigen, dass $\{\boldsymbol{v}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ den Vektorraum V erzeugt. Nehmen wir dazu an, dass es ein $\boldsymbol{v}$ gibt, das keine Linearkombination von $\{\boldsymbol{v}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ ist, so wäre auch die Familie $\{\boldsymbol{v}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \cup \{\boldsymbol{v}\}$ linear unabhängig.
Klar ist, dass es keine Beziehung der Form

$$\boldsymbol{0} = r_1 \cdot \boldsymbol{v}_{\lambda_1} + \ldots + r_n \cdot \boldsymbol{v}_{\lambda_n}$$

mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \Lambda$ geben kann, da ja $\{\boldsymbol{v}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ eine Familie linear unabhängiger Vektoren ist. Es kann also höchstens eine Beziehung der Form

$$\mathbf{0} = r_1 \cdot \boldsymbol{v}_{\lambda_1} + \ldots + r_n \cdot \boldsymbol{v}_{\lambda_n} + s \cdot \boldsymbol{v}$$

mit $s \neq 0$ geben. Aber dann lässt sich diese Beziehung auflösen zu

$$\boldsymbol{v} = -\frac{r_1}{s} \cdot \boldsymbol{v}_{\lambda_1} - \ldots - \frac{r_n}{s} \cdot \boldsymbol{v}_{\lambda_n}$$

und $\boldsymbol{v}$ wäre eine Linearkombination der $\{\boldsymbol{v}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, im Widerspruch zur Wahl von $\boldsymbol{v}$.
Also ist die Familie $\{\boldsymbol{v}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \cup \{\boldsymbol{v}\}$ linear unabhängig, und das wiederum ist ein Widerspruch dazu, dass $\{\boldsymbol{v}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ ein nicht verlängerbares System linear unabhängiger Vektoren ist. Damit war unsere Annahme falsch, und $\{\boldsymbol{v}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ erzeugt den Vektorraum. ■

Betrachten wir ein Erzeugendensystem eines Vektorraumes und lassen so lange Vektoren weg, bis es nicht mehr verkürzt werden kann, ohne die Eigenschaft, erzeugend zu sein, zu verlieren, so folgt sofort der Basisauswahlsatz

Basisauswahlsatz

Ist $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m\}$ ein Erzeugendensystem eines Vektorraumes V, so enthält es eine Basis, d. h., es gibt $i_1, i_2, \ldots, i_n \in \{1, \ldots, m\}$, sodass $\{\boldsymbol{v}_{i_1}, \boldsymbol{v}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{v}_{i_n}\}$ eine Basis von V ist.

Verlängern wir ein System linear unabhängiger Vektoren so lange, bis es maximal ist, also nicht mehr verlängert werden kann, ohne die Eigenschaft der linearen Unabhängigkeit zu verlieren (und benutzen wir das Zornsche Lemma), so erhalten wir den Basisergänzungssatz

Basisergänzungssatz

Ist $\{\boldsymbol{v}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ eine Familie linear unabhängiger Vektoren in V, so kann $\{\boldsymbol{v}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ zu einer Basis von V ergänzt werden.

Insbesondere hat jeder Vektorraum eine Basis.

Ein wichtiges aber schwieriges Resultat für Vektorräume ist die folgende Aussage.

Länge von Basen

Je zwei Basen $\{\boldsymbol{v}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ und $\left\{\boldsymbol{w}_\gamma\right\}_{\gamma\in\Gamma}$ sind gleich lang, sie sind also entweder beide unendlich oder beide endlich mit gleich vielen Elementen.

Der entscheidende Punkt im Beweis ist der Basisaustauschsatz von Steinitz, den wir hier nur im endlich-dimensionalen Fall formulieren.

Basisaustauschsatz von Steinitz

Ist $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ eine Basis von V und sind $\{\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m\}$ linear unabhängige Vektoren, so gibt es $i_1, \ldots, i_m \in \{1, \ldots, n\}$ derart, dass die $\boldsymbol{v}_{i_l}$ durch die $\boldsymbol{w}_l$ ersetzt werden können und wieder eine Basis entsteht. In anderen Worten: Die Vektoren $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ mit

$$\boldsymbol{u}_j = \begin{cases} \boldsymbol{w}_t\,, & \text{falls } j = i_t \text{ für ein } t\,, \\ \boldsymbol{v}_j\,, & \text{sonst} \end{cases}$$

bilden wieder eine Basis von V.

Speziell ist also $m \leq n$.

Zur Erinnerung: Für eine Menge M bezeichnet $|\,M\,|$ die Mächtigkeit dieser Menge. Das kann eine endliche Zahl sein oder auch ∞.

Definition

Ist $\{\boldsymbol{v}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ eine Basis von V, so heißt $|\,\Lambda\,|$ die **Dimension** des Vektorraumes V und wird mit $\dim(V)$ bezeichnet.

Die Größe $\dim(V)$ ist eine endliche Zahl oder ∞.

Ist $U \subset V$ ein Untervektorraum, so ist eine Basis von U eine Familie linear unabhängiger Vektoren in V, lässt sich also nach dem Basisergänzungssatz zu einer Basis von V ergänzen.

Dimension von Untervektorräumen

Ist $U \subset V$ Untervektorraum, so ist $\dim(U) \leq \dim(V)$.

Mengen können komplexe Vektorräume sein

Bis jetzt haben wir immer über den reellen Zahlen gearbeitet, da dies der Körper ist, über dem wir gewohnt sind zu arbeiten. Wir haben jedoch mit den komplexen Zahlen bereits einen weiteren Körper kennengelernt, der für viele Anwendungen interessant ist, manchmal sogar interessanter als der Körper der reellen Zahlen (wenn es etwa um die Lösung von Gleichungen geht). Auf die komplexen Zahlen lässt sich die Theorie der Vektorräume sofort übertragen.

Definition

Ein (komplexer) **Vektorraum** ist eine nichtleere Menge V zusammen mit einer Addition

$$'+' : V \times V \longrightarrow V, \quad (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \longmapsto \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$$

Teil III

und einer Skalarmultiplikation

$$' \cdot ' : \mathbb{C} \times V \longrightarrow V, \quad (a, \boldsymbol{v}) \longmapsto a \cdot \boldsymbol{v},$$

sodass die acht Vektorraumaxiome (1–8) aus Abschn. 11.1 (mit komplexen statt reellen Zahlen) erfüllt sind.

Beispiel

Die Menge $\mathbb{C}^n$, zusammen mit der komponentenweisen Addition und Skalarmultiplikation (Mathematischer Hintergrund 11.2) ist ein komplexer Vektorraum. ◀

Beispiel

Ist $M \subset \mathbb{C}$ eine beliebige Teilmenge, so ist

$$V = \{f : M \longrightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ ist eine Abbildung}\},$$

zusammen mit der punktweise definierten Addition und Skalarmultiplikation, also mit

$$\begin{aligned} (f+g)(z) &= f(z) + g(z) && \text{für alle } z \in M, \\ (a \cdot f)(z) &= a \cdot f(z) && \text{für alle } a \in \mathbb{C}, z \in M \end{aligned}$$

ein komplexer Vektorraum.

Hierfür schreiben wir $\mathrm{Abb}(M, \mathbb{C})$. ◀

Alle Konzepte, die wir für reelle Vektorräume entwickelt haben, übertragen sich sofort auf die komplexe Situation.

Eine Linearkombination von komplexen Vektoren $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ in einem komplexen Vektorraum V etwa ist eine Summe

$$\boldsymbol{w} = a_1 \cdot \boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_k \cdot \boldsymbol{v}_k$$

mit komplexen Koeffizienten $a_1, \ldots, a_k$. Diese Vektoren heißen linear unabhängig, wenn der Nullvektor nur durch die triviale Linearkombination mit ihnen dargestellt werden kann. Sie heißen Erzeugendensystem von V, wenn sich jeder Vektor $\boldsymbol{w} \in V$ als Linearkombination der Vektoren $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ schreiben lässt, und sie heißen Basis von V, wenn sie linear unabhängig sind und ein Erzeugendensystem von V bilden.

Die Übertragung der Begriffe auf unendlich viele Vektoren erfolgt wie im reellen Fall und bleibt dem Leser überlassen. Alle Aussagen und Sätze für reelle Vektorräume gelten für komplexe entsprechend.

Eine Teilmenge $U \subset V$ eines komplexen Vektorraumes V heißt (komplexer) Untervektorraum, wenn sie nichtleer und abgeschlossen unter Addition und Skalarmultiplikation ist.

Die Dimension eines komplexen Vektorraumes ist definiert als die Anzahl der Vektoren, die in einer Basis vorkommen.

Der komplexe Vektorraum $\mathbb{C}^n$ hat die Dimension n. Eine Basis ist gegeben durch die Vektoren

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Der komplexe Vektorraum $\mathrm{Abb}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ hat die Dimension ∞.

Beispiel

Ist $M \subset \mathbb{C}$ eine (nichtleere) Kreisscheibe, so heißt eine Abbildung $f : M \longrightarrow \mathbb{C}$ Polynom, wenn es ein $n \in \mathbb{N}_0$ und komplexe Zahlen $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ gibt, sodass

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

Bezeichnen wir mit U die Menge der Polynome auf M, so ist U ein komplexer Untervektorraum des Vektorraumes $V = \mathrm{Abb}(M, \mathbb{C})$, und die Polynome $(f_n)_{n \in N_0}$ mit $f_n(z) = z^n$ (für $n \in \mathbb{N}_0,\ z \in M$) bilden eine Basis von U. ◀

Achtung Wir können die reellen Zahlen als Teil der komplexen Zahlen auffassen (eingebettet als x-Achse in die Zeichenebene). Ist V ein komplexer Vektorraum, so ist deshalb automatisch auch eine Skalarmultiplikation mit reellen Zahlen definiert, und dadurch wird V ebenfalls zu einem reellen Vektorraum (Einschränkung der Skalare). Bei diesem Übergang ist jedoch Vorsicht mit den Begriffen „lineare Unabhängigkeit" und „Basis" geboten. Betrachten wir etwa $\mathbb{C} = \mathbb{C}^1$ als komplexen Vektorraum, so hat dieser die Dimension 1. Als reeller Vektorraum identifiziert er sich jedoch mit der Zeichenebene, und daher bilden über den reellen Zahlen die beiden Vektoren

$$\boldsymbol{v}_1 = 1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \mathrm{i} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Basis (wohingegen im Komplexen $\boldsymbol{v}_1 + \mathrm{i} \cdot \boldsymbol{v}_2 = \mathbf{0}$ eine nichttriviale Linearkombination des Nullvektors ist).

Ganz allgemein gilt: Ist V ein komplexer Vektorraum der komplexen Dimension n, so kann V (durch Einschränkung der Skalare) als reeller Vektorraum aufgefasst werden und hat als solcher die (reelle) Dimension $2n$. ◀

Teil III

11.5 Mathematischer Hintergrund: Vektorräume über beliebigen Körpern

In der Nachrichtentechnik wird häufig mit digitalen Daten gearbeitet, also nicht mit reellen oder komplexen, sondern mit binären Zahlen. Auch in diesem Kontext möchte man jedoch auf die Techniken und Hilfsmittel der linearen Algebra zurückgreifen. Dazu betrachten wir einen beliebigen Körper $\mathbb{K}$ und eine nichtleere Menge V zusammen mit einer Addition

$$'+' : V \times V \longrightarrow V, \quad (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \longmapsto \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$$

und einer Skalarmultiplikation

$$' \cdot ' : \mathbb{K} \times V \longrightarrow V, \quad (a, \boldsymbol{v}) \longmapsto a \cdot \boldsymbol{v},$$

die für Vektoren $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{w}$ in V und Skalare a und b in $\mathbb{K}$ die acht Vektorraumaxiome (1–8) (wie wir sie schon im Fall reeller oder komplexer Vektorräume betrachtet haben) erfüllen. Dann heißt V, zusammen mit $+$ und $\cdot$, ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

Die Konzepte, Aussagen und Ergebnisse, die wir für reelle und komplexe Vektorräume entwickelt und erhalten haben, übertragen sich entsprechend auf die allgemeine Situation. Man kann also auch hier von linearer Unabhängigkeit, Erzeugendensystemen, Basen und Untervektorräumen sprechen.

Für die Anwendung wichtig ist der Fall $\mathbb{K} = \mathbb{F}_2$ (Mathematischer Hintergrund 9.1), der Körper mit zwei Elementen (Bits). Dann ist für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ die Menge

$$V = \mathbb{F}_2^n = \left\{ \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \mid b_i \in \mathbb{F}_2 \right\},$$

zusammen mit der komponentenweise definierten Addition und Skalarmultiplikation

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 + c_1 \\ \vdots \\ b_n + c_n \end{pmatrix}, \quad \lambda \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot b_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot b_n \end{pmatrix},$$

ein $\mathbb{F}_2$-Vektorraum (der Dimension n). Beachten Sie, dass diese Vektorräume endliche Mengen (mit 2^n Elementen) sind, sich also komplett auflisten lassen. Der Vektorraum $\mathbb{F}_2^2$ etwa schreibt sich als

$$\mathbb{F}_2^2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

wobei etwa

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Als $\mathbb{F}_2$-Vektorraum hat $\mathbb{F}_2^2$ die Dimension 2, und eine Basis ist gegeben durch

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Betrachtet werden auch allgemeinere Vektorräume und lineare Abbildungen zwischen Vektorräumen über $\mathbb{F}_p$, den Körpern mit p Elementen (wobei p eine Primzahl ist), oder noch allgemeiner über $\mathbb{F}_q$, wobei $q = p^l$ eine Primzahlpotenz ist. Viele gängige Methoden der Audio- und Videocodierung etwa arbeiten in Vektorräumen über dem Körper $\mathbb{F}_{256} = \mathbb{F}_{2^8}$ (in dem die Bytes die Rolle der Elemente des Körpers und damit der Buchstaben in der Codierung übernehmen). Ein linearer $[n, k]_{256}$-Code ist dann ein k-dimensionaler Untervektorraum $C \subset \mathbb{F}_{256}^n$. Eine Codierungsvorschrift ist eine lineare Abbildung $f : \mathbb{F}_{256}^k \longrightarrow \mathbb{F}_{256}^n$ mit $\mathrm{Bild}(f) = C$ und $\mathrm{Kern}(f) = \{\boldsymbol{0}\}$. Die Codierung macht also aus einer Nachricht, bestehend aus k Bytes, ein Codewort mit n Bytes, und ergänzt somit die Nachricht um Redundanzen. Im Rahmen der Decodierung wird versucht, mithilfe der Redundanzen ein fehlerhaft übermitteltes Codewort zu korrigieren. Üblicherweise erfolgt das durch die Betrachtung geeigneter linearer Gleichungssysteme über $\mathbb{F}_{256}$. Für $n \leq 257$ ist es möglich, Codierungsvorschriften zu finden, die bis zu $\lfloor \frac{n+1-k}{2} \rfloor$ Fehler in der Übertragung korrigieren (wobei $\lfloor a \rfloor$ die Abrundung einer reellen Zahl a bezeichnet). Das ist etwa der Fall bei den Reed-Solomon-Codes, die in der Audiocodierung Einsatz finden.

Die Körper $\mathbb{F}_p$ und $\mathbb{F}_p$-Vektorräume für große Primzahlen p spielen eine wichtige Rolle in der Kryptografie, also in der Verschlüsselung von Nachrichten.

In den meisten technischen Anwendungen wird zwar mit reellen oder komplexen Vektorräumen gearbeitet, gerechnet wird jedoch in der Regel mit Vektoren und Vektorräumen über den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$, da irrationale Zahlen numerisch ja nicht exakt, sondern nur näherungsweise und auf endlich viele Nachkommastellen gerundet (d. h. als rationale Zahlen) behandelt werden können.

Gelegentlich werden zu numerischen Berechnungen auch Vektorräume über dem Erweiterungskörper

$$\mathbb{Q}[\mathrm{i}] = \{r + s \cdot \mathrm{i} \mid r, s \in \mathbb{Q}\}$$

oder anderen endlichen Erweiterungen der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ benutzt, speziell dann, wenn es notwendig ist, quadratische Gleichungen oder Gleichungen höherer Ordnung zu lösen.

Aufgaben

11.1 Zeigen Sie, dass die Menge

$$V = \left\{ \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} \mid 2v_1 + 3v_2 - 4v_3 + v_4 = 0 \right\}$$

ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^4$ ist.

11.2 Zeigen Sie, dass die Menge

$$V = \left\{ \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t^3 \\ t^4 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

kein Untervektorraum von $\mathbb{R}^4$ ist.

11.3 Überprüfen Sie, ob die Menge

$$V = \left\{ \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} r \\ s \\ r+s \\ r-s \end{pmatrix} \mid r, s \in \mathbb{R} \right\}$$

ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^4$ ist.

11.4 Zeigen Sie, dass die Vektoren

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig sind.

11.5 Zeigen Sie, dass die Vektoren

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

linear abhängig sind.

11.6 Zeigen Sie, dass die Vektoren

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Basis von $\mathbb{R}^3$ bilden.

11.7 Wir betrachten die beiden Vektoren

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Mit $\langle\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}\rangle$ bezeichnen wir den von $\boldsymbol{v}_1$ und $\boldsymbol{v}_2$ erzeugten Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass

$$\langle\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \right\}.$$

Bilden $\boldsymbol{v}_1$ und $\boldsymbol{v}_2$ auch eine Basis dieses Untervektorraums?

11.8 Eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Orthonormalisieren Sie diese Basis.

11.9 Zeigen Sie, dass

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist und orthonormalisieren Sie diese Basis.

11.10 Zeigen Sie: Stehen zwei vom Nullvektor verschiedene Vektoren $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{w}$ senkrecht aufeinander, so sind sie linear unabhängig.

Verallgemeinern Sie diese Aussage auf n Vektoren, die paarweise orthogonal sind.

11.11 Wir betrachten den Untervektorraum $U \subset \mathbb{R}^4$, der erzeugt wird von den beiden Vektoren

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $U^\perp$.

11.12 Zeigen Sie: Ist $E \subset \mathbb{R}^n$ eine Ebene (durch $(0, 0, 0)$), so gilt für das orthogonale Komplement $E^\perp$,

$$E^\perp = \mathbb{R} \cdot \boldsymbol{n}_E ,$$

wobei $\boldsymbol{n}_E$ ein (beliebiger) Normalenvektor von E ist.

11.13 Weisen Sie die Dimensionsformel für das orthogonale Komplement nach: Ist $U \subset \mathbb{R}^n$ ein Untervektorraum der Dimension l, so ist $U^\perp \subset \mathbb{R}^n$ ein Untervektorraum der Dimension $n - l$.

11.14 Wir betrachten die Menge $V = \mathrm{Abb}(I, \mathbb{R}^n)$ der Abbbildungen

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}^n ,$$

wobei I ein beliebiges Intervall ist (abgeschlossen, offen oder halboffen). Zeigen Sie, dass V ein Vektorraum wird, wenn man die Vektorraumoperationen komponenten- und punktweise (analog zum Beispiel des Vektorraumes $\mathrm{Abb}([a, b], \mathbb{R})$) definiert.

11.15 Wir betrachten den Vektorraum $V = \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der Abbildungen

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

(vgl. Aufgabe 11.14). Zeigen Sie, dass die Elemente $f, g \in V$ mit

$$f(x) = \cos(x), \quad g(x) = \sin(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$

linear unabhängig sind.

11.16 Wir betrachten den Vektorraum $V = \mathrm{Abb}((0, \infty), \mathbb{R})$ der Abbildungen

$$f : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$$

(vgl. Aufgabe 11.14). Zeigen Sie, dass die Elemente $f, g \in V$ mit

$$f(x) = \exp(x), \quad g(x) = \ln(x) \text{ für alle } x \in (0, \infty)$$

linear unabhängig sind.

11.17 Wir betrachten den Vektorraum $V = \mathrm{Abb}((1, \infty), \mathbb{R})$ der Abbildungen

$$f : (1, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$$

(vgl. Aufgabe 11.14). Zeigen Sie, dass die Elemente $f, g, h \in V$ mit

$$f(x) = \frac{1}{x+1}, \quad g(x) = \frac{1}{x-1}, \quad h(x) = \frac{x}{x^2-1}$$

für alle $x \in (1, \infty)$ linear abhängig sind.

11.18 Benutzen Sie den Satz von Steinitz (Abschn. 11.3), um folgende Aussage zu beweisen: Ist E_1 parallel zu E_2, so ist auch E_2 parallel zu E_1.

11.19 Zeigen Sie, dass die Menge U der zweimal differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, die die Beziehung

$$f'' + 3f' + 2f = 0$$

erfüllen, ein Untervektorraum von $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ist.

Teil III